ANUL XXVII. APRILIE 1947 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 120000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 240.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI: CATEVA TEOREME DE ALGEBRA (URMARE).
2 NOTA MATEMATICA 2, 3, 4, 5.
3 CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1694, 2418, 2430, 2431, 2432.
6. PROBLEME PROPUSE: 2504 - 2511.
7. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

38680

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul ori cărui nou abonament şi al oricărui volum este de 100.000 lei.

Ne vedem obligaţi cu părere de rău, faţă de enorma scumpire a tiparului, de a mări costul abonamentului la 100.000 (una sută mii) lei. Factura pentru No. 2 al R. M. T. este de 5,760.000 lei, cu tendinţa de urcare pentru viitor.

Acum, după 26 ani de apariţie regulată, R. M. T. este grav ameninţată de a dispare. Ar fi o diminuare a spiritualităţii ştiinţifice a Ţării noastre.

Facem apel la corespondenţi noştrii cari s'au abonat deja de a completa abonamentul până la suma de 100.000 lei

---

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 100000 (una sută mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anii: I, XXIII şi XXV, epuizaţi. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 100.000 lei fiecare.

ANUL XXVII — No. 2. TIMISOARA, APRILIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 10000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100.000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

CÂTEVA TEOREME DE ALGEBRĂ

DE

V. ALACI.

(Urmare).

II.

Vom rezuma acum rezultatele ce se desprind din teoremele stabilite, în tabloul T ce urmează, din care apoi vom deduce: 1°. *O metodă de a construi ori câte funcții trigonometrice inverse și logaritmice, de felul celor din tablou, care să aibă aceiași derivată.* 2°. *O metodă care să ne permită a hotărâ dacă astfel de funcții, date, au sau nu aceiași derivată, fără efectuarea derivării;* 3°. *O clasă de identități trigonometrice remarcabile.* Vom da și câteva aplicații corespunzătoare.

TABLOUL T

u	v	Dacă sunt date funcțiile din prin coloană, atunci	Dacă este dată funcția Y, atunci
$a \operatorname{arc\,tg} X$	$\frac{1}{2i}\log Y$	$Y = A\left(\frac{1+iX}{1-iX}\right)^a$	$X = i\,\frac{\sqrt[a]{A} - \sqrt[a]{Y}}{\sqrt[a]{A} + \sqrt[a]{Y}}$
$a \operatorname{arc\,tg} X_1 + b \operatorname{arc\,tg} X_2$		$Y = A\left(\frac{1+iX_1}{1-iX_1}\right)^a\left(\frac{1+iX_2}{1-iX_2}\right)^b$	$X_1 = i\,\frac{\sqrt[a]{A(1+iX_2)^b} - \sqrt[a]{Y(1-iX_2)^b}}{\sqrt[a]{A(1+iX_2)^b} - \sqrt[a]{Y(1-iX_2)^b}}$
$\sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{arc\,tg} X_k$		$Y = A\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+iX_k}{1-iX_k}\right)^{a_k}$	
$a \operatorname{arc\,sin} X$		$Y = A(iX \pm \sqrt{1-X^2})^{2a}$	$X = \frac{1}{2i}\left(\sqrt[2a]{\frac{Y}{A}} - \sqrt[2a]{\frac{A}{Y}}\right)$
$\sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{arc\,sin} X_k$		$Y = A\prod_{k=1}^{n}\left(iX_k \pm \sqrt{1-X_k^2}\right)^{2a_k}$	
$a \operatorname{arc\,cos} X$		$Y = A\left(X \mp \sqrt{X^2-1}\right)^{2a}$	$X = \frac{1}{2}\left(\sqrt[2a]{\frac{Y}{A}} + \sqrt[2a]{\frac{A}{Y}}\right)$
$\sum_{k=1}^{n} a_k \operatorname{arc\,cos} X_k$		$Y = A\prod_{k=1}^{n}\left(X_k \mp \sqrt{X_k^2-1}\right)^{2a_k}$	

unde $i=\sqrt{-1}$; a, b, a_k constante, sau funcții de x; A o constantă arbitrară, X, X_k, Y funcții derivabile de x.

In prima coloană a tabloului T avem diferite funcţii trigonometrice inverse; în a 2-a coloană avem numai funcţia $\frac{1}{2i}\log Y$. În coloana 3-a şi a 4-a şi corespunzător fiecărei linii avem, fie valoarea lui Y în funcţie de X (sau X_k), fie valoarea lui X. (sau X_k) în funcţie de Y (sau de Y şi celelalte funcţii X_k), astfel ca funcţiile u şi v din tablou, corespunzătoare, să aibă aceiaşi derivată.

Aplicaţii.

Iată cum putem construi funcţii trigonometrice şi logaritmice, care să admită aceiaşi derivată, cu ajutorul tabloului T.

1°. Privim prima linie, de exemplu, şi luăm $X=x+i$, $a=4$, $(i=\sqrt{-1})$ atunci corespunzător, din coloana 3-a deducem

$$Y=A\left(\frac{ix}{2-ix}\right)^4=A\left(\frac{x}{x+2i}\right)^4.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(1)\qquad u=4\operatorname{arc\,tg}(x+i),\qquad v=\frac{1}{2i}\log A\left(\frac{x}{x+2i}\right)^4,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

2°. Referindu-ne tot la prima linie şi luând $Y=x+1$, $a=3$, corespunzător, din coloana 4-a deducem

$$X=i\frac{\sqrt[3]{A_1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{A_1}+\sqrt[3]{x+1}},\text{ şi notând }A=\sqrt[3]{A_1},$$

putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(2)\qquad u=3\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-\sqrt[3]{x+1}}{A+\sqrt[3]{x+1}},\quad (i=\sqrt{-1}),\qquad v=\frac{1}{2i}\log(x+1),$$

au aceiaşi derivată,

3°. Trecem la linia 2-a a tabloului T şi luând

$$X_1=2x,\quad X_2=-x,\quad a=2,\quad b=1,$$

corespunzător din coloana 3-a obţinem

$$Y=A\frac{(1+2ix)^2(1-ix)}{(1-2ix)^2(1+ix)}=A\frac{1+ix(3+4x^2)}{1-ix(3+4x^2)}.$$

Putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(1)\qquad u=2\operatorname{arc\,tg}2x-\operatorname{arc\,tg}x,\qquad v=\frac{1}{2i}\log A\frac{1+ix(3+4x^2)}{1-ix(3+4x^2)},\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

4°. Referindu-ne tot la linia 2-a a tabloului T şi luând

$$X_2=-ix^2,\quad Y=(1+x^2)^5,\quad a=3,\quad b=5,\quad (i=\sqrt{-1}),$$

atunci, corespunzător din coloana 4-a obţinem

$$X_1=i\frac{\sqrt[3]{A_1(1+x^2)^5}-\sqrt[3]{(1+x^2)^5(1-x^2)^5}}{\sqrt[3]{A_1(1+x^2)^5}+\sqrt[3]{(1+x^2)^5(1-x^2)^5}}\quad(A=\sqrt[3]{A_1}),$$
$$=i\frac{A-\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}{A+\sqrt[3]{(1-x^2)^5}},$$

putem deci enunţa: *Funcţiile*

$$(4)\qquad u=3\operatorname{arc\,tg} i\frac{A-\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}{A+\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}-\operatorname{arc\,tg} ix^2,\qquad v=\frac{5}{2i}\log(1+x^2),\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

5°. Privim linia 4-a a tabloului T şi luăm $X=1-ix$, $a=3$, $(i=\sqrt{-1})$, atunci, corespunzător din coloana 3-a deducem

$$Y=A\left[i+x\pm\sqrt{x(x+2i)}\right]^6,\quad (i=\sqrt{-1})$$

astfel că putem enunţa: *Funcţiile*

$$(5)\qquad u=3\arcsin(1-ix),\qquad v=\frac{1}{2i}\log A\left(x+i\pm\sqrt{x(x+2i)}\right)^6\quad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

6°. In fine referindu-ne tot la linia 4-a şi luând

$$y=\frac{x-1}{x+1},\quad a=4,$$

corespunzător din coloana 4-a deducem

$$X=\frac{1}{2i}\left(\sqrt[8]{\frac{x-1}{A(x+1)}}-\sqrt[8]{\frac{A(x+1)}{x-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{\sqrt[4]{x-1}-\sqrt[4]{A(x+1)}}{\sqrt[8]{A(x^2-1)}},$$

astfel că putem enunţa: *Funcţiile*

$$u = 4 \arcsin \frac{1}{2i} \cdot \frac{\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[4]{A(x+1)}}{\sqrt[8]{A(x^2-1)}},$$

(6) $$v = \frac{1}{2i} \log \frac{x-1}{x+1}, \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

Observare. Credem suficiente aplicaţiile interesante tratate: altele mult mai numeroase se pot construi analog.

III.

Vom evidenţia aci noua metodă pe care am menţionat-o la începutul acestui articol. Ea ne va permite a hotărâ dacă două funcţii de variabila x, date, una trigonometrică inversă şi alta logaritmică de forma celor din tabloul T, au sau nu aceiaşi derivată.

Pentru aceasta, vom observa întâi dacă funcţiile date sunt de forma celor din tabloul T. Dacă sunt (şi numai în acest caz), scrim relaţia corespunzătoare din coloana 3-a sau a 4-a, şi dacă din această relaţie, putem determina pentru A o valoare constantă, va rezulta că funcţiile date au aceiaşi derivată.

Câteva probleme vor lămuri mai bine metoda de urmat:

Problema 1-a. *Să se arate că funcţiile*

(1) $u = 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{i x^3}{4 - x_3}, \quad v = \frac{3}{2i} \log 2(2 - x^3), \quad (i=\sqrt{-1}),$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Punem întâi pe v sub forma

$$v = \frac{1}{2i} \log 8 (2 - x^3)^3$$

şi observăm că în prima linie a tabloului T avem funcţii de forma (1). Scriind relaţia corespunzătoare din coloana 4-a, înlocuind pe X şi Y cu valorile lor din (1), găsim

$$\frac{i x^3}{4 - x^3} = i \frac{\sqrt[3]{A} - 4 + 2x^3}{\sqrt[3]{A} + 4 - 2x^3}.$$

Simplificând pe i şi aplicând o proprietate a proporţiilor, obţinem

$$\frac{2}{2 - x^3} = \frac{\sqrt[3]{A}}{2(2 - x^3)}.$$

De aci deducem $A = 64$, deci constant. Concluzia este că funcţiile (1) au aceiaşi derivată.

Problema 2-a. *Să se demonstreze că funcţiile*

$$u = 3 \operatorname{arc\,tg} i x + 2 \operatorname{arc\,tg} (2x + i),$$

(2) $$v = \frac{3}{2i} \log \frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{i} \log \frac{x}{1 - ix}, \qquad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Punem întâi pe v sub forma echivalentă

$$v = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{1 - ix}\right)^2.$$

Apoi, observăm că în linia 2-a a tabloului T avem funcţii de forma (2) şi scriind relaţia corespunzătoare din coloana 3-a, în care înlocuim pe X_1, X_2, Y cu valorile lor din (2), avem succesiv:

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \left(\frac{x}{1-ix}\right)^2 = A \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \cdot \left[\frac{1 + i(2x+i)}{1 - i(2x+i)}\right]^2 =$$
$$A \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \left(\frac{ix}{1-ix}\right)^2.$$

De aci rezultă $A = i^2 = -1$, deci constant. Concluzia este că funcţiile (2) au aceiaşi derivată.

Problema 3-a. *Să se arate că funcţiile*

$$u = 3 \arccos \sqrt{x^2+3},$$

(3) $$v = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{\sqrt{x^2+3} \mp \sqrt{x^2+2}}{2}\right)^6, \qquad (i=\sqrt{-1})$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Observăm că funcţii de forma (3) avem în linia 6-a a tabloului T, astfel că scriind relaţia corespunzătoare din coloana 3-a, obţinem

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+3} \mp \sqrt{x^2+1}}{2}\right)^6 = A (\sqrt{x^2+3} \mp \sqrt{x^2+2})^6.$$

De aici rezultă $A = \frac{1}{64}$, deci constant. Concluzia este că funcţiile (3) au aceiaşi derivată.

Problema 4-a. *Să se arate că funcţiile*

$$u = 3 \operatorname{arc\,tg} i \frac{2-x}{2+x} - 2 \arcsin i\sqrt{x},$$

(4) $$v = \frac{1}{2i} \log x^3 (\sqrt{x} \pm \sqrt{1+x})^4, \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

Soluţie. Conform teoremei a 8-a, dacă avem funcţiile

$$u = a \operatorname{arc\,tg} X_1 + b \arcsin X_2, \quad v = \frac{1}{2i} \log Y,$$

pentru ca ele să aibă aceiaşi derivată, trebue să avem satisfăcută relaţia

$$Y = A\left(\frac{1+iX_1}{1-iX_1}\right)^a (iX_2 \pm \sqrt{1-X_2^2})^{2.b}.$$

Scriind această relaţie pentru funcţiile (4) avem

$$x^3(\sqrt{x} \pm \sqrt[3]{1+x})^4 = A\left(\frac{1-\frac{2-x}{2+x}}{1+\frac{2-x}{2+x}}\right)^3 (\sqrt{x} \pm \sqrt{1+x})^4$$

$$= A\left(\frac{x}{2}\right)^3 (\sqrt{x} \pm \sqrt{1+x})^4.$$

De aci deducem $A = 8$, deci constant. Concluzia este că funcţiile (4) au aceiaşi derivată.

IV.

Voim să încheiem articolul nostru cu o clasă remarcabilă de identităţi, pe care o vom desprinde din cercetarea atentă a tabloului T.

1. In adevăr, în tabloul T, în prima coloană avem diferite funcţii trigonometrice inverse u, iar în coloana 2-a avem numai funcţia $v = \frac{1}{2i}\log Y$.

In coloana 4 a însă şi în dreptul fiecărei linii avem relaţiile care ne dau pe X (sau X_k) în funcţie de Y (sau de Y şi celelalte funcţii X_k), astfel ca funcţiile u şi v să aibă aceiaşi derivată.

Rezultă din această observare, *că funcţia*

$$(1) \qquad v = \frac{1}{2i}\log Y$$

şi funcţiile u din prima coloană, în care înlocuim X (*sau* X_k) *cu valorile lor, corespunzătoare, din coloană 4-a, au aceiaşi derivată.*

Aceste funcţii u, cu o mică schimbare de notaţii devin:

$$(2)\quad \begin{cases} u_1 = c\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\sqrt[c]{A}-\sqrt[c]{Y}}{\sqrt[c]{A}+\sqrt[c]{Y}}, \qquad u_2 = a\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\sqrt[a]{B(1+iX)^b}-\sqrt[a]{Y(1-iX)^b}}{\sqrt[a]{B(1+iX)^b}+\sqrt[a]{Y(1-iX)^b}} + b\operatorname{arc\,tg} X, \\ u_3 = m\operatorname{arc\,sin}\dfrac{1}{2i}\left(\sqrt[2m]{\dfrac{Y}{M}}-\sqrt[2m]{\dfrac{M}{Y}}\right), \qquad u_4 = n\operatorname{arc\,cos}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[2n]{\dfrac{Y}{N}}+\sqrt[2n]{\dfrac{N}{Y}}\right). \end{cases}$$

Prin urmare, funcţiile (1) *şi* (2) *au aceiaşi derivată.*

2. Funcţiile (1) şi (2) având aceiaşi derivată, rezultă că, oricare două dintre ele diferă printr'o constantă, dar pentru ca constanta să fie aceiaşi pentru oricare dintre funcţiile (2) şi funcţia $\frac{1}{2i}\log Y$ trebuie să luăm

$$(3) \qquad B = M = N = A, \quad (A = e^{2iC}).$$

Rezultă de aci că în cazurile particulare (3) funcţiile (2) sunt identice între şi identice cu funcţia

$$v + C = \frac{1}{2i}\log AY, \quad (A = e^{2iC}).$$

In felul acesta avem drept să scriem următoarele identităţi remarcabile:

$$(I)\quad \begin{cases} c\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\sqrt[c]{A}-\sqrt[c]{Y}}{\sqrt[c]{A}+\sqrt[c]{Y}} = a\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\sqrt[a]{A(1+iX)^b}-\sqrt[a]{Y(1-iX)^b}}{\sqrt[a]{A(1+iX)^b}+\sqrt[a]{Y(1-iX)^b}} + b\operatorname{arc\,tg} X \\ = m\operatorname{arc\,sin}\dfrac{1}{2i}\left(\sqrt[2m]{\dfrac{Y}{A}}-\sqrt[2m]{\dfrac{A}{Y}}\right) = n\operatorname{arc\,cos}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[2n]{\dfrac{Y}{A}}+\sqrt[2n]{\dfrac{A}{Y}}\right) = \dfrac{1}{2i}\log AY. \end{cases},$$

unde $i = \sqrt{-1}$, *a, b, c, m, n constante date* (*sau funcţii de x derivabile*), A *o constantă arbitrară, iar* X, Y *funcţii de variabila x, derivabile.*

Nota Redacţiei. Se acordă un premiu de 20000 (douăzeci mii) lei pentru cea mai bună soluţie primită de la corespondenţi noştrii (până la 1 Martie 1948), prin care se vor stabili direct identităţile (I).

NOTE MATEMATICE

2. — *Analyse indéterminé multigrade. Trouver toutes les solutions entières du système*

$$X_1, X_2 \overset{p}{=} Y_1, Y_2, Z, Z \quad (p = 1, 3),$$

avec la condition $X_2 - X_1 = Y_2 - Y_1$.

En posant $X = x - r$, $X_2 = x + r$, $Y_1 = y - r$, $Y_2 = y + r$, il vient $Z = x - y$, puis la condition $r^2 + xy = 0$ satisfaite pour $x = k\alpha^2$, $y = -k\beta^2$, ensuite $r = k\alpha\beta$.

On peut donc supprimer le facteur k et on aura

$$\alpha^2 - \alpha\beta,\ \alpha^2 + \alpha\beta \overset{p}{=} -\alpha\beta - \beta^2,\ \alpha\beta - \beta^2,\ \alpha^2 + \beta^2,\ \alpha^2 + \beta^2 \quad (p = 1, 3),$$

α et β étant des paramètres entiers positifs arbitraires et premiers entre eux.

Exemples numériques.

α	β		S_1	S_3
3	2	$3, 15 \overset{1,3}{=} (-10), 2, 13, 13$	18	3.402
4	1	$12, 20 \overset{1,3}{=} (-5), 3, 17, 17$	32	9.728

A. GLODEN

3. — *Asupra notei 1 din R. M. T. vol. XXVII, pag. 6 — 7.*

Rectificări:

Observ că relația (1) trebue înlocuită cu:

$$(1')\quad cp\frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg}\varepsilon)$$

în consecință:

$$(2')\quad \operatorname{tg}\varepsilon = 1 - 2\,cp\frac{1}{2}(B + C)$$

Analog, relația (4) trebue înlocuită prin:

$$(4')\quad cp\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sin(p-c)}{\sin p}\right]$$

în consecință:

$$(\alpha)\quad \frac{\sin(p-c)}{\sin p} = 1 - 2\,cp\frac{1}{2}(a+b)$$

tot odată

$$(\beta)\quad \frac{\sin(p-a)}{\sin(p-b)} = 2\,cp\frac{1}{2}(a-b) - 1$$

deci:

$$(a)\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{sp\frac{1}{2}(a+b) - cp\frac{1}{2}(a+b)}{cp\frac{1}{2}(a-b) - cp\frac{1}{2}(a-b)}}$$

PETRE TEODORESCU

4. — *Sur des carrés curieux.*

1. Dans tout système de numération dont la base est de la forme $B = 4p + 1$, on a les carrés suivants de huit chiffres dont les racines carrés s'écrivent avec les mêmes chiffres en ordre inverse.

a) $\overline{p\,p+1\,p\,p+1\,3p\,3p+1\,3p\,3p+1} = (\overline{2p\,2p+1\,2p\,2p+1})^2$,

$\overline{p+1\,p+1\,p+1\,p+1\,3p-1\,3p+1\,3p-1\,3p+1} = (2p+1\ 2p\ 2p+1\ 2p)^2$.

Exemples. $B = 9$.

$$2\,3\,2\,3\,6\,7\,6\,7 = (4\,5\,4\,5)^2.$$

Les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7 sont consécutifs.

$$3\,3\,3\,3\,5\,7\,5\,7 = (5\,4\,5\,4)^2.$$

b) $\overline{p\,p-1\,p\,p-1\,3p\,3p+1\,3p\,3p+1} = (\overline{2p\,2p-1\,2p\,2p-1})^2$,

$\overline{p-1\,p+1\,p-1\,p+1\,3p+1\,3p+1\,3p+1\,3p+1} = (\overline{2p-1\,2p\,2p-1\,2p})^2$.

Exemples. $B = 13$.

$$3\,2\,3\,2\,9\,\overline{10}\,9\,\overline{10} = (6565)^2,$$
$$2\,4\,2\,4\,\overline{10}\,\overline{10}\,\overline{10}\,\overline{10} = (5656)^2.$$

2. Théorème. *Dans un système de numération dont la base est de la forme* $B = 2m^2 = n^2 + 1$, *le nombre de quatre chiffres* $N = \overline{m^2\,m^2-1\,m^2-1\,m^2}$ *est un carré parfait de la forme* $abba = (cc)^2$ *où* c *est égal au produit* $m.n$.

En effet, décomposant la nombre N en ses différens ordres d'unités, on a, avec $m.n < B$,

$$N = \overline{m^2\,m^2-1\,m^2-1\,m^2}$$
$$= m^2.B^3 + (m^2-1).B^2 + (m^2-1).B + m^2$$
$$= [m.n.(2m^2+1)]^2 = [m.n.(B+1)]^2 = (\overline{m.n\,m.n})^2$$

Exemples. B=50. $N=\overline{25}\,\overline{24}\,\overline{24}\,\overline{25}=(\overline{35}\,\overline{35})^2$.

B=1682. $N=\overline{841}\,\overline{840}\,\overline{840}\,\overline{841}=(\overline{1189}\,\overline{1189})^2$.

3. Théorème. *Dans tout système de numération de base* $B=4n+1$, *le carré du nombre de deux chiffres identiques* $\overline{B-2n}\,\overline{B-2n}$ *est égal à* $\overline{B-3n}\,\overline{B-3n}\,\overline{B-n}\,\overline{B-n}$.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que le carré d'un nombre de deux chiffres identiques $c\,c$ soit de la forme $a\,a\,b\,b$ dans un système de numération de base B est que l'on ait, à la fois[1]

$$a+b=B+1 \text{ et } c^2=(a-1)^2+a.b.$$

Or,

$$\overline{B-3n}+\overline{B-n}=2B-4n=4n+1=B,$$

et

$$\overline{B-2n}^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=n^2+(n+1).(3n+1)$$
$$=(B-3n-1)^2+\overline{B-3-n}.\overline{B-n}.$$

Exemple. $B=17$, $n=4$. $99^2=55\,\overline{13}\,\overline{13}$.

V. THÉBAULT

---

5. — *Aplicații ale Trigonometriei patratice la Trigonometria sferică.*

Intr'un triunghiu sferic dreptunghiu $b, c<90^0$, avem relațiile:

$$\sin c=(\sin c+\sin\omega)\,sp\,C.$$

$$\sin c=(\sin c+\sin a+\sin\omega)\,sp\,\frac{C}{2};\ \sin\omega=\cos c\sin b.$$

Demonstrație. Fie ABC un triunghiu sferic dreptunghiu, iar O centrul sferei. Se ia un punct B_1 pe dreapta OB. Scoborâm perpendiculara B_1A_1 pe dreapta OA și perpendiculara A_1C_1 pe dreapta OC.

Unghiul $B_1C_1A_1$ este egal cu unghiul C. Aplicăm două teoreme cunoscute din „Trigonometria patratică", p. 42 triunghiului dreptunghiu $B_1A_1C_1$.

$$(1)\qquad B_1A_1=(B_1A_1+A_1C_1)\,sp\,C.$$

$$(2)\qquad B_1A_1=(B_1A_1+A_1C_1+B_1C_1)\,sp\,\frac{C}{2}.$$

In triunghiurile dreptunghice B_1A_1O, A_1C_1O, B_1C_1O avem $B_1A_1=OA_1\operatorname{tg}c$, $A_1C_1=OA_1\sin b$ $B_1C_1=OC_1\operatorname{tg}a$, $\dfrac{OC_1}{OA_1}=\cos b$.

---

[1]) *V. Thébault, Mathesis*, 1936 (Supplément, p. 5).

Inlocuind în relațiile (1) și (2) avem

$$OA_1\operatorname{tg}c=(OA_1\operatorname{tg}c+OA_1\sin b)\,sp\,C$$
$$OA_1\operatorname{tg}c=(OA_1\operatorname{tg}c+OA_1\sin b+OC_1\operatorname{tg}a)\,sp\,\frac{C}{2}$$

Impărțind cu OA_1

$$\operatorname{tg}c=(\operatorname{tg}c+\sin b)\,sp\,C$$
$$\operatorname{tg}c=(\operatorname{tg}c+\sin b+\cos b\operatorname{tg}a)\,sp\,\frac{C}{2}\quad\text{sau}$$

$$\sin c=(\sin c+\cos c\sin b)\,sp\,C.$$
$$\sin c=\left(\sin c+\cos c\sin b+\cos c\cos b\frac{\sin a}{\cos a}\right)sp\,\frac{C}{2}.$$

$$\cos a=\cos b\cos c,\quad \cos c\sin b=\sin\omega,$$

relațiile devin

$$\sin c=(\sin c+\sin\omega)\,sp\,C.$$
$$\sin c=(\sin c+\sin\omega+\sin a)\,sp\,\frac{C}{2}.$$

Analog avem relațiile:

$$\sin b=(\sin b+\sin\omega_1)\,sp\,B$$
$$\sin b=(\sin b+\sin\omega_1+\sin a)\,sp\,\frac{B}{2},\ \sin\omega_1=\cos b\sin c$$

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

EXAMEN DE ADMITERE LA POLITEHNICA TIMIȘOARA

Facultatea de Mine și Metalurgie

(6—9 Noembrie 1946).

Oral (dat în scris).

Algebră. 1. Să se calculeze:

$$\lim\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-\sqrt{2-x^2}},$$

pentru $x\to 1$.

De pref. fără regula lui *Hôspital*

2. Să se calculeze suma:

$$E_n=1+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\frac{C_n^3}{4}+\cdots\frac{C_n^n}{n+1}.$$

3. Să se calculeze derivata:

$$y=\frac{1}{2}\log_{\text{neper.}}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

4. Să se reprezinte grafic funcțiunea:

$$y=\frac{x(x^2-9)}{x^2-1}.$$

5. Să se rezolve ecuația:

$$x^4-x^3-51x^2+163x-40=0$$

știind că admite rădăcina $2+\sqrt{3}$.

Geometrie. a. Volumul unei piramide este a treia parte din acela al unei prisme cu aceiaşi bază şi aceiaşi înălţime.

b. Se consideră un cerc O şi un punct A. Prin A se duce o secantă AMN la cercul O. Să se arate că aria dreptunghiului construit pe $\overline{AN}$ cu înălţimea $\overline{AM}$ este constant. Care sunt poziţiile limite ale secantei pentru care dreptunghiul poate fi construit când secanta se roteşte în jurul punctului A.

c. Poziţiile relative a două sfere.

d. Proprietăţile catetelor şi înălţimei într'un triunghiu dreptunghic. Aplicaţie la transformarea unui dreptunghiu într'un patrat echivalent şi a unui patrat într'un dreptunghiu cu o lungime dată.

Trigonometrie. 1. Se dă $\sin x = m$. Să se calculeze $\sin 2x$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ şi $\cos 3x$.

2. Să se calculeze latura şi ipotenuza triunghiului echilateral înscris în cerc în funcţie de R.

3. Să se facă calculele prin logaritmi:

$$1+\sin 3x;\quad 1+\cos 2x;\quad \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$$

4. Să se rezolve ecuaţiile:

$$\sin x + m\cos x = n$$
$$a\sin^2 x + b\cos^2 2x + c = 0.$$

5. Intr'un triunghiu dreptunghiu se cunosc: ipotenuza a şi înălţimea h, din A pe ipotenuză. Să se determine celelalte elemente.

Teză

Algebra. 1. Se dă ecuaţia: $x^3 - 9x^2 + 24x + a = 0$ şi se cere:

a. Să se discute numărul rădăcinilor reale cu ajutorul teoremei lui *Rolle*, după valorile lui a.

b Să se determine valoarea parametrului a pentruca o rădăcină să fie egală cu suma celorlalte două. Apoi să se găsească rădăcinile.

c. Notând cu $f(x)$ polinomul dat să se determine a astfel ca funcţiunea să admită un maxim egal cu 20.

2. Să se găsească valorile parametrului λ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x+\lambda(y+z)=0 \\ \lambda(x+y)+=0 \\ \lambda x+y+(\lambda+1)z=0 \end{cases}$$

este compatibil.

Geometrie. I. 1°. Pe laturile $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, ale patratului ABCD, luate ca diametre se construiesc către interiorul patratului semicercurile O_1, O_2, O_3, O_4.

Să se arate că semicercurile O_1, O_2, O_3, O_4 trec prin acelaş punct I. Dacă $2a$ este lungimea laturii patratului dat, iar A_1 aria comună semicercurilor O_4 şi O_1, A_2 aria comună semicercurilor O_1 şi O_2, etc. Să se calculeze aria $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

2°. La semicercurile O_1 şi O_4 ducem tangenta comună MN (M şi N fiind respectiv punctele de contact) Ea taie diagonala AC în S, laturile CB şi CD în P şi R, iar laturile AB şi AD în P' şi R'. Să se găsească:

a. Lungimea tangentei comune $\overline{MN}$.

b. Distanţele punctelor S, M, N la punctul I.

c. Distanţele punctelor P şi R la vârful A şi ale punctelor P' şi R' la vârful C.

3°. Dreptele AP şi CP' sunt perpendiculare.

II. Să se rezolve chestiile dela (1°) şi (2) în cazul când *patratul dat* este înlocuit printr'un romb A B C D, având $AC = 2a$ şi $\overline{BD} = 2b$.

Trigonometrie. Se consideră două semicercuri de aceeaşi rază $\overline{OA} = \overline{O'A} = R$. tagente exterioare în A şi o paralelă $\overline{BC}$ la linia centrelor. Să se calculeze în funcţie de R şi de unghiul $\widehat{OAB} = x$:

a. Suprafaţa triunghiului ABC.

b. Raza cercului circumscris triunghiului ABC

c. Raza cercului înscris triunghiului ABC.

2. Se dă un semicerc de diametru $\overline{AB} = 2R$. Din A se duce o coardă $\overline{AM}$ făcând cu $\overline{AB}$ unghiul ascuţit x şi se proiectează M pe $\overline{AB}$ în P.

a. Să se determine unghiul x ştiind că

$$\overline{PM} + m\,\overline{AP} = n\,\overline{AB}.$$

b. Să se calculeze valoarea lui x pentru cazul particular $m = n = \sqrt{3}$.

c. Prin M şi A se duc respectiv tangentele la cerc, ce se întretaie în N.

Să se calculeze în funcţie de R şi x, $\overline{NA}$ şi $\overline{MN}$.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, Nr. 7, Martie 1947. † *Nicolae Abramescu*, de *Petre Sergescu* Două conice atasate unui patrulater, de *N N. Mihaileanu*, Raport pentru premiul de Aritmetică „*I. Ionescu*", de Ing. *I. S. Antoniu*, G-l *Gh. Buiciiu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Buletinul Politehnicei „Gh. Asachi", din Iaşi:* Tome 1. Fasc. 2, 1946 Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité, par *Al. C. Climescu*. Sur certaines courbes dérivées d'une courbe gauche et applications, par *Gh. Gheorghiev*. Sur une surface cerclée particulière, par *Mihail Şt. Botez*. Sur une certaine déformation des congruences de sphères, par *Adolf Haimovici*. Remarque sur le potentiel newtonien, par *Miron Nicolesco*. Sur les espaces à topologie transitive d'ordre n, par *Al. Climescu*. Ecuaţii iterate lineare de ordinul al 2-lea cu coeficienţi constanţi, de *A. Myller*. Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions de variable complexe, par *O. Mayer*. Sul problema di *Dini-Neumann* nel piano, di *Gaetano Fichera*. Sur l'enveloppe des familles planes de coniques, par *C P. Bogdan*. Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire, par *C. P. Bogdan*. Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, par *D. I. Mangeron*. Notes de Mécanique rationnelle. Remarques sur le problème généralisant celui de la cloche et son battant, par *D. I. Mangeron*. Calcules topographiques à la machine de calcul sans levier, par *Ion Irimescu*. Sur les corrélations entre P_H, la salinité et la concentration de l'oxigène dissout dans l'éau de la mer Noire, par *Virgiliu Gh. Gheorghiu* et *Nicolae Calinicenco*. Sur la variation du vo-

lume des éléments participants dans une réaction chimique: $a+b=c$, par *I. N. Ciochină*. Nouvelle théorie sur l'origine de l'énergie dans un système chimique, par *I. Ciochină*, et *C. Calistru*. Un artifice de calcul dans l'analyse chimique, par *Constantin Strub*. Dentologie du liévre, par *Emil Boldur*. La théorie du quadripôle appliquée au monteur d'induction en cascade avec un compensateur de phase, par *Cezar Parteni Antoni* et *N. V. Boţan*. Sur l'amérioration des courges, par *Ştefan Popesco*. Contribution à la connaissance des micromycètes de Moldovie, par *C. Sandu Ville*. Comptes rendus des livres reçus:

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1694. — *In triunghiul dreptunghic* ABC *se notează cu* D *proiecţia vârfului* A *pe ipotenuza* BC *şi cu* L *şi* M *punctele unde o dreaptă paralelă cu* BC *taie respectiv catetele* AB *şi* AC. *Fie* N *simetricul punctului* M *faţă de mijlocul laturei* AC. *Să se arate că triunghiul* DLN *este dreptunghiu în* D *şi să se studieze variaţia suprafeţei lui în funcţie de unghiul* BDL $=x$.

VASILE VASU

Soluţie. Să arătăm că triunghiurile BDL şi ADN sunt asemeni. Ele au unghiurile din B şi A egale deoarece au laturile perpendiculare. Mai rămâne să arătăm că au laturile ce le cuprind proporţionale. In adevăr, conform theoremei lui *Thasles*

$$\frac{BL}{LA}=\frac{MC}{MA}$$

unde aplicând o proprietate a proporţiilor rezultă

$$\frac{BL}{AB}=\frac{MC}{AC}\quad\therefore\quad\frac{BL}{AN}=\frac{AB}{AC},$$

deoarece $MC=AN$ ca diferenţe de segmente egale. Dar triunghiurile dreptunghice ABD şi ABC sunt asemeni având unghiul din B comun, încât

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AB}{AC}$$

şi deci prin comparare

$$\frac{BL}{AN}=\frac{BD}{AD}\quad\therefore\quad\frac{BL}{BD}=\frac{AN}{AD}$$

adică tocmai ce trebuia arătat.

Rezultă ungh. ADN = ungh. BDL şi deci

ungh. LDN = ungh. LDA + ungh. ADN = ungh LDA + ungh. BDL = 90°.

Suprafaţa triunghiului este dată de expresia

$$S=\frac{1}{2}LD\,.\,DN.$$

Aplicând teorema sinusului în triunghiul BLD găsim

$$LD=\frac{BD\sin B}{\sin(180^0-B-x)}=\frac{c\sin B\cos B}{\sin(B+x)}=\frac{c\sin 2B}{2\sin(B+x)},$$

cu ajutorul aceleiaşi teoreme, din triunghiul DNC scoatem

$$DN=\frac{DC\sin C}{\sin(90^0+C-x)}=\frac{b\sin C\cos C}{\sin(90^0+C-x)}=\frac{b\sin 2C}{2\sin(90^0+C-x)},$$

încât

$$S=\frac{bc\sin 2B\sin 2C}{8\sin(B+x)\sin(90^0+C-x)}=\frac{bc\sin 2B\sin 2C}{4[1+\sin(2x+B-C)]}.$$

Fără a particulariza problema, putem presupune $B>C$ şi fie $B-C=\alpha$. Cum B şi C sunt ascuţite $\alpha<90^0$. Unghiul x variază numai între 0 şi 90°. Când $x=0$.

$$S=\frac{bc\sin 2B\sin 2C}{4(1+\sin\alpha)},$$

care este un *maxim relativ* deoarece când x creşte numitorul creşte, şi deci S descreşte până când ajungem la valoarea $2x+\alpha=90^0$, adică $x=45^0-\frac{1}{2}\alpha$ când avem *minimul*

$$S=\frac{1}{8}bc\sin 2B\sin 2C;$$

în fine când x depăşeşte această limită numitorul descreşte, şi deci S creşte până când $x=90^0$, adică până la maximul

$$S=\frac{bc\sin 2B\sin 2C}{4(1-\sin\alpha)}.$$

Soluţia dată de Dnii: Sub-Locot. *Marin F. Ştefănescu* şi *Segal Zigu*.

Gh. Th. Gh.

Problema 2418. *Repetăm un număr de două cifre de două ori, îi scriem 1 la dreapta şi avem un patrat perfect. Care este acel număr?*

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţie. Fie ab numărul de două cifre şi N^2 patratul de cinci cifre format conform enunţului, avem

$$N^2=ab\,ab\,1=1000\,ab+10\,ab+1,$$

sau

$$N^2 - 1 = 1010\,ab.$$

Mai putem scri

$$(1) \qquad (N-1)(N+1) = 2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot ab.$$

N^2 fiind patrat de 5 cifre, rezultă că

$$(2) \qquad 100 \leq N \leq 316.$$

Privim relaţia (1), deducem că $N-1$, sau $N+1$ trebuie să se dividă prin factorul prim 101, deci

$$(3) \qquad N = 101\,k + 1, \quad \text{sau} \quad N = 101\,k - 1,$$

în care cazuri relaţia (1) devine

$$101\,k(101\,k \pm 2) = 2 \cdot 5 \cdot 101 \cdot ab,$$

sau

$$(4) \qquad k(101\,k \pm 2) = 2 \cdot 5 \cdot ab.$$

De aci deducem că, k trebuie să fie par şi nu putem lua de cât $k = 2$, având în vedere relaţiile (3) şi inegalităţile (2).

Relaţia (4) devine astfel, simplificată prin 2,

$$202 \pm 2 = 5 \cdot ab,$$

unde evident trebuie să luăm semnul — în primul membrul şi avem

$$200 = 5\,ab,$$

deci

$$ab = 40.$$

Numărul de două cifre cerut este astfel 40 şi el satisface problema, fiindcă

$$40401 = 201^2.$$

Soluţie date de d-nii: *Beschea Radu* (Brăila), *Blaga O.* (Lic. Cluj), *Ciucescu Paut* (Lic. Slatina), *Corduneanu C-tin* (Colegiul N. Filipescu), *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina), *Dăscălescu M.* (Bucureşti), *Diaconu Vasile* (Colegiul N. Filipescu), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gligor Ioan* (student), *Mâncescu Ion* (Colegiul N. Filipescu), *Neguţ I.* (Tg.-Jiu), *Novac Ioan* (P. T.), *Pisanca Ion* (Colegiul Loga, Timişoara), *Puşcaşiu Silviu* (P. T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj), *Ristea Gh.* (Bucureşti), *Săsărman M.* (Cluj), *Serengău Mihai* (P. T.), *Stanciu V. Mihai* (Lic. Mil. Craiova), *Târcomnicu C.* (Slatina), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti) *şi Tincu C-tin* (P. T.).

Problema 2430. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relaţiile*

$$\frac{b\sin^2\frac{C}{2} + c\sin^2\frac{B}{2}}{b\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

$$\frac{b\cos\frac{C}{2}\sin^2\frac{C}{4} + c\cos\frac{B}{2}\sin^2\frac{B}{4}}{b\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{4} + c\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}} = \operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţie. 1°. Notând cu E primul membru al primei relaţii şi ţinând seamă că,

$$b = 2R\sin B = 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2},$$

$$c = 2R\sin C = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

putem scri succesiv,

$$E = \frac{4R\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right)}{4R\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{B}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\right)} =$$

$$\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Astfel prima relaţie este stabilită.

2°. Notând cu F primul membru al relaţiei a 2-a şi ţinând seamă că,

$$b = 2R\sin B = 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 8R\sin\frac{B}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{B}{2},$$

$c = 8R\sin\frac{C}{4}\cos\frac{C}{4}\cos\frac{C}{2}$, putem scri succesiv

$$F = \frac{8R\left(\sin\frac{B}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin^2\frac{C}{4} + \sin\frac{C}{4}\cos\frac{C}{4}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\sin^2\frac{B}{4}\right)}{8R\left(\sin\frac{B}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{4} + \sin\frac{C}{4}\cos\frac{C}{4}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{4}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}\left(\sin\frac{C}{4}\cos\frac{B}{4}+\cos\frac{C}{4}\sin\frac{B}{4}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}\left(\sin\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}+\cos\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}\right)} = \frac{\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{4}}{\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}} = \operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}.$$

Relaţia 2-a este şi ea stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Anastasescu Decebal* (P., T.), *Baniscu Chirică*(student, Cluj), *Bălă C-tin* (Lic. Tg.-Jiu), *Bălăuţă Mihai* (Lic. Deva), *Beşchea Radu* (P., B,), *Bogza Mihai* (Roman), *Cernescu Nicolae* (Liceul Milit. N. Filipescu), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Corduneanu C-tin* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina), *Diaconu Vasile* (Lic. Milit. N. Filipescu), *Giurconiu Mihai* (P.,T.), *Gligor Ioan* (student), *Haret Sp. Radu* (Bucureşti), *Mâncescu Ioan* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Munteanu Ioan* (Lic. Milit,, N. Filipescu), *Nedelcu Ulpius* (Şc. Of. de Geniu, Bucureşti), *Novac Ioan* (P., T.), *Peţanca Dacia* (Bucureşti), *Pişanca Ionel* (Colegiul N. Filipescu), *Popa Vasile* (P., T.) *Puşcaşiu Silviu* (P.,T.), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab Bucureşti) şi *Tincu C-tin* (P., T.).

Observări. 1°. D-l *Teodorescu Petre* a dat următoarea relaţie mai generală

$$\frac{b\sin^2\frac{C}{2^n}\prod_{i=1}^{n=1}\cos\frac{C}{2^i}+C\sin^2\frac{B}{2^n}\prod_{i=1}^{n-1}\cos\frac{B}{2^i}}{b\cos^2\frac{C}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{C}{2^i}+c\cos\frac{B}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{B}{2^i}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2^n}\operatorname{tg}\frac{C}{2^n}$$

2°. D-l *Bogza Mihai* şi autorul problemei au folosit cunoştiinţi din articolul *„O metodă simplă pentru a stabili relaţii remarcabile într'un triunghiu"*[1].

Pentru a stabili de exemplu relaţia 2-a, se foloseşte un triunghiu auxiliar $A_1B_1C_1$, dedus din triunghiul ABC căruia i se prelungeşte latura BC la stânga cu $BB_1=c$ şi la dreapta cu $CC_1=b$, A_1 concizând cu A. Elementele acestui triunghiu $A_1B_1C_1$ în funcţie de ale lui ABC sunt:

$$(1)\qquad b_1=2b\cos\frac{C}{2},\quad c_1=2c\cos\frac{B}{2},$$
$$B_1=\frac{B}{2},\quad C_1=\frac{C}{2}.$$

Relaţia întâia, pentru $A_1B_1C_1$ se scrie

$$\frac{b_1\sin^2\frac{C_1}{2}+c_1\sin^2\frac{B_1}{2}}{b_1\cos^2\frac{C_1}{2}+c_1\cos^2\frac{B_1}{2}}=\frac{B_1}{2}\operatorname{tg}\frac{C_1}{2},$$

în care, dacă se ţine seamă de relaţiile (1), se obţine tocmai relaţia a 2-a din enunţ.

Problema 2431. — *Dacă într'un triunghiu* ABC *rapoartele*

$$\frac{r_a}{a},\quad \frac{r_b}{b},\quad \frac{r_c}{c}$$

sunt în progresie aritmetică, atunci avem şi

$$\cos^3\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\cos^3\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

PETRE TEODORESCU

Soluţie. Conform enunţului trebuie să avem

$$(1)\qquad \frac{r_b}{b}-\frac{r_a}{a}=\frac{r_c}{c}-\frac{r_b}{b}.$$

Cum însă avem cunoscute relaţiile

$$r_a=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

şi analoagele ei (Compléments de Trigonométrie, p. 177), relaţia (1) devine

$$\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}-\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}-\frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.$$

Aducând la formă întreagă, găsim

$$(2)\qquad \cos^2\frac{C}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2}\right)=\cos^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}\right).$$

Dar,

$$\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2}=\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}\sin\frac{B+A}{4}\sin\frac{B-A}{4}$$
$$=\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}=\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2},$$

analog

[1]) *V. Alaci:* Gazeta Matematică, Vol. LI, p. 59.

$$\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}.$$

In virtutea acestor relații, (2) devine,

$$\cos^3\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}=\cos^3\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2},$$

sau

$$\cos^3\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2},$$

care este relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Balaniscu Chirică* (student, Cluj), *Bălăuță Mihai* (Lic. Deva), *Bogza Mihai* (Roman), *Cernescu Nicolae*, *Constantinescu Paul* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Constantinescu Virgil*, *Corduneanu C-tin* (Lic. Milit., N. Filipescu) *Crăcea D-ru* (Lic. Slatina), *Dăscălescu Mihai* (Lic Mihai Viteazul București), *Diaconu Vasile* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Gherlan V.* (Lic. Beiuș), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Gligor Ioan* (student), *Haret Sp. Radu* (București), *Munteanu Ion* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Novac Ioan* (P, T.), *Pantea Al.* (Lic. Beiuș), *Petanca Dacia* București), *Popa Vasile* (P., T.) și *Tincu C-tin* (P, T).

Problema 2432. — *Să se stabilească relațiile*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 6x\sin x}{\sin 3x}\,dx=-\frac{18}{35},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 6x\sin^3 x}{\sin^3 3x}\,dx=-\frac{3544}{3465}.$$

V. ALACI

Soluție. Vom desvolta întâi fracțiile de sub integral și apoi vom integra termen cu termen.

1°. Avem succesiv

$$\frac{\sin^3 6x\sin x}{\sin 3x}=\frac{2\sin 3x\cos 3x\sin^2 6x\sin x}{\sin 3x}=\frac{1}{2}(2\sin^2 6x)(2\sin x\cos 3x)=$$

$$\frac{1}{2}(1-\cos 12x)(\sin 4x-\sin 2x)=\frac{1}{4}(2\sin 4x-2\sin 2x-2\sin 4x\cos 12+2\sin 2x\cos 12x),$$

sau

$$\frac{\sin^3 6x\sin x}{\sin 3x}=\frac{1}{4}(2\sin 4x-2\sin 2x-\sin 16x+\sin 8x+\sin 14x-\sin 10x).$$

Integrând de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 6x\sin x}{\sin 3x}\,dx=\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x+\frac{\cos 16x}{16}-\frac{\cos 8x}{8}-\frac{\cos 14}{14}+\frac{\cos 10x}{10}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(0-2+0-0+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{72}{35}\right)=-\frac{18}{35}.$$

Prima relație este astfel stabilită.

2°. Avem apoi succesiv

$$\frac{\sin^5 6x\sin^3 x}{\sin^3 3x}=\frac{(2\sin 2x\cos 3x)^3\sin^2 6x\sin^3 x}{\sin^3 3x}=\frac{1}{2}(2\sin^2 6x)(2\cos^3 3x)(2\sin^2 x)(2\sin x\cos 3x)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 12x)(1+\cos 6x)(1-\cos 2x)(\sin 4x-\sin 2x)=\frac{1}{4}(1-\cos 12x+\cos 6x-\cos 6x\cos 12x)\times$$

$$(2\sin 4x-2\sin 2x-\sin 6x-\sin 2x+\sin 4x)=\frac{1}{8}(2-2\cos 12x+2\cos 6x-\cos 18x-\cos 6x)\times$$

$$(3\sin 4x-3\sin 2x-\sin 6x)=\frac{1}{8}(2+\cos 6x-2\cos 12-\cos 18x)(3\sin 4x-3\sin 2x-\sin 6x)$$

$$=\frac{1}{16}(12\sin 4x-12\sin 2x-4\sin 6x+3\sin 10x-3\sin 2x-3\sin 8x+3\sin 4x-\sin 12x-6\sin 16x$$

$$+6\sin 8x+6\sin 14x-6\sin 10x+2\sin 18x-2\sin 6x-3\sin 22x+3\sin 14x+3\sin 20x-2\sin 16x$$

$$+\sin 24x-\sin 12x),$$

sau

$$\frac{\sin^5 6x \sin^3 x}{\sin^3 3x} = \frac{1}{16}(-15\sin 2x + 15\sin 4x - 6\sin 6x + 3\sin 8x - 3\sin 10x - 2\sin 12x + 9\sin 14x - 9\sin 16x + 2\sin 18x + 3\sin 20x - 3\sin 22x + \sin 24x).$$

Integrând această relație între 0 și $\frac{\pi}{2}$, obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 6x \sin^3 x}{\sin^3 3x}\,dx = \frac{1}{16}\left(\frac{15\cos 2x}{2} - \frac{15\cos 4x}{4} + \cos 6x - \frac{3\cos 8x}{8} + \frac{3\cos 10x}{10} + \frac{\cos 12x}{6} - \frac{9\cos 14x}{14} + \frac{9\cos 16x}{16} - \frac{\cos 18x}{9} - \frac{3\cos 20x}{20} + \frac{3\cos 22x}{22} - \frac{\cos 24x}{24}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{16}\left(-15 - 2 - \frac{3}{5} + \frac{9}{7} + \frac{2}{9} - \frac{3}{11}\right) = \frac{1}{16}\left(-\frac{88}{5} + \frac{2}{9} + \frac{78}{77}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{44}{5} + \frac{1}{9} + \frac{39}{77}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\frac{44}{5} + \frac{428}{693}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{5} + \frac{107}{693}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{7088}{3465}\right) = -\frac{3544}{3465}.$$

Relația 2-a este astfel stabilită.

Soluții foarte bune date de d-nii: *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Mitric Aurel* (P., T.), *Novac Ion* (P., T.), *Pali Sergiu* (P T.) și *Popa Vasile* (P. T.). S'au primit și câteva soluții greșite.

Observare. Autorul problemei a ajuns să stabilească cele două relații din enunț și altele analoage, prin considerați cu totul diferite[1].

PROBLEME PROPUSE

2504. — Se cere patratul perfect de forma $\overline{abc\,abcd}$. G-L GH. BUICLIU

2505. — Să se stabilească formula care permite aflarea sumei a n termeni din șirul:

$$3 + 8 + 15 + 24 + \cdots$$

MIRC A MOLDOVAN

2506. — Să se rezolve ecuația

$$x^8 - 16x^6 + 79x^4 - 120x^2 + 9 = 0$$

și să i-se exprime apoi rădăcinele sub forma cea mai simplă. EUGEN VISA

2507. — Să se arate că adevărata valoare a expresiei

$$E = \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin^3 x} - \frac{n[\cos 2nx + \cos x \cos(2n+1)x]}{\sin^2 x}$$

pentru $x \to 0$, este $2\sum_{k=1}^{n} k^2$.

C. IONESCU-TIU

2508. — Fie AB, CD două coarde într'un cerc; o paralelă la AB taie pe BC, AD în E și F. Să se arate că punctele C, E, D, F sunt pe un acelaș cerc.

N. N. MIHAILEANU

2509. — In triunghiul BAC dreptunghic în A și înscris în cercul O se duce înălțimea AD și apoi bisectoarele DE și DF ale unghiurilor ADB și ADC. Să se arate că avem

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4(\overline{DO}\cdot\overline{BO} + \overline{BD}\cdot\overline{OC}),$$

$$DE + DF = \sqrt{2}\,\overline{AD}.$$

MAIOR G. P. BOERECCU

2510. — Să se stabilească identitatea

$$a \operatorname{arc\,tg} i\,\frac{\sqrt[a]{(1+ix)^b} - \sqrt[a]{x(1-ix)^b}}{\sqrt[a]{(1+ix)^b} + \sqrt[a]{x(1-ix)^b}} + b \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\log x, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

V. ALACI

2511. — Să se demonstreze relațiile

$$4\,sp^4\alpha = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha - \cos 4\alpha},$$

$$8\,cp^6\alpha = \frac{5 + 6\cos 2\alpha + 3\cos 4\alpha + 2\cos^3 2\alpha}{5 + 6\sin 2\alpha - 3\cos 4\alpha + 2\sin^3 2\alpha},$$

$0 \leq \alpha \leq 90^0$.

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

[1]) *V. Alaci:* Une classe d'intégrales définies, nécessaire dans la théorie des séries trigonométriques. (Bulletin de l'École Polytechnique de Timișoara, Tome 12, Fasc. 3—4, 1946).

T A B L O U

de candidaţii reuşiţi la examenul de admitere din 6 Noemvrie 1946, la

FACULTATEA DE MINĂ ŞI METALURGIE LA POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA.

1. **Avrămuţiu Gh. Gheorghe**, Lic. Gh. Barițiu, Cluj.
2. **Buda E. Oscar Constantin**, Lic. Coriolan Brediceanu, Lugoj.
3. **Savin I. Dumitru**, Lic. Coriolan Brediceanu, Lugoj.
4. **Comnino D. Ştefan**, Liceul Militar. Cernăuţi.
5. **Gheonea St. Carol**, Lic. Nic. Bălcescu, Brăila.
6. **Botoran I. Vasile**, Lic. Militar Industrial, Bucureşti.
7. **Ciucă N. Aurel**, Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.
8. **Florescu I. Dumitru**, Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.
9. **Petrescu P. Dan Ion**, Colegiul Naţional „Carol I",
10. **Humă G. Ioan**, Lic. „Ferdinand I", Bacău.
11. **Pelinel I. Dumitru**, Lic. Găeşti. Dâmboviţa.
12. **Dumitrescu D. Mihalache.** Lic. I. C. Brătianu, Piteşti.
13. **Mihuţ M. Gheorghe**, Lic. Traian, T.-Severin.
14. **Stoenescu M. Ioan**, Şcoala Tehnică Aeronautică, Mediaş.
15. **Atanasiu A. Aurel**, Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
16. **Drăgan M. Petru**, Lic. Militar D. Sturza. Craiova.
17. **Georgescu P. Ghilă Dumitru**, Lic. Traian, T.-Severin.
18. **Marinescu C. Mircea**, Lic. Gheorghe Lazăr, Bucureşti.
19. **Greda C. Alexe Valter**, Lic. St. O. Iosif, Odorhei.
20. **Ţiu N. Nicolae.** Lic. Avram Iancu, Brad.
21. **Crâşmariu A. Vasile**, Lic. Grigore Ghica Vodă. Dorohoi.
22. **Florescu I. Mihai Alexandru**, Lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
23. **Popavici C. Mihai**, Lic. Moise Nicoară, Arad.
24. **Diaconescu Şt. Ionel**, Lic. Fraţii Buzeşti. Craiova.
25. **Gheorghiu Şt. Dumitru**, Lic. Petru Rareş, P.-Neamţ.
26. **Florescu I. Ioan**, Coleg. Naţ. „Carol I", Craiova.
27. **Georgescu S. Gheorghe.** Lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
28. **Simu T. Maria**, Lic. Teoretic de Fete, T. Severin.
29. **Rusu N. Nicolae**, Lic. Titu Maiorescu, Aiud.
30. **Strat V. Gheorghe**, Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
31. **David A. Corneliu**, Lic. Avram Iancu, Brad.
32. **Jugureanu Al. Nicolae**, Lic. Unirea, Focşani.
33. **Vlaicu C. Zeno**, Lic. Mitr. Simion Ştefan, Cluj.
34. **Saşiu A. Dumitru.** Lic. C. Brediceanu, Lugoj.
35. **Stoian R. Leonard**, Lic. Vasile Alexandri, Galaţi.
36. **Buzilă I. Simion**, Lic. C. D. Loga, Timişoara.
37. **Cojocariu I. Gheorghe**, Lic. C. D. Loga, Timişoara.
38. **Curteanu I. Nicolae**, Lic. Gheorghe Lazăr. Sibiu.
39. **Nemeth C. Ladislau**, Lic. Piarist, Timişoara.
40. **Roşescu M. Nicolae**, Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
41. **Cioc M. Dumitru**, Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
42. **Stănescu Gh. Ioan.** Lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploieşti.
43. **Hirsch Iritz Alice**, Lic. Carmen Sylva, Timişoara.
44. **Văleanu S. Teodor**, Lic. C. Brediceanu, Lugoj.
45. **Curpăn T. Constantin**, Lic. Petru Rareş, P.-Neamţ.
46. **Ghimbaşiu I. Corneliu**, Lic, Sf. Petru şi Pavel. Ploieşti.
47. **Radu D. Constantin**, Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
48. **Valvarich I. Nicolae**, Lic. Unirea, Focşani.
49. **Cartianu I. Eftimie**, Coleg. Naţ. „Carol I", Craiova.
50. **Costa C. Marcello**, Lic. Dr. Ion Meşota, Braşov.
51. **Zamfirescu D. Ilie**, Coleg. Naţ. „Carol I", Craiova.
52. **Lichii I. Victor.** Lic. „Ferdinand I", Bacău.
53. **Bărboiu C. Grigore**, Lic. Milit. Mihai Viteazul, Timişoara.
54. **Lazăr F. Lazăr**, Lic. Titu Maiorescu, Aiud.
55. **Marin P. Ilie**, Şcoala Tehnică Aeronautică, Mediaş.
56. **Bobeanu I. Stelian Traian.** Lic. Sf. Petru şi Pavel, Ploieşti.
57. **Ciubucă M. Gavril**, Lic. Industrial, Braşov.
58. **Popescu Tr. Dumitru**, Lic. N. Bălcescu, Brăila.
59. **Strat V. Vasile Dumitru**, Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
60. **Todică M. Simion**, Lic. C. D. Lgoa. Timişoara.
61. **Lăzărescu Şt. Ioan**, Lic. V. Alecsandri, Galaţi.
62. **Mocanu V. Rudolf**, Lic. Roman Vodă, Roman.
63. **Sandru P. Sorin Liviu**, Lic. Dragoş Vodă, Câmpulung.
64. **Tarcea T. Ioan.** Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
65. **Criştiu T. Liviu**, Lic. Avram Iancu, Brad.
66. **Croce G. Micea**, Lic. C. D. Loga, Timişoara.
67. **Crudu Gh. Emanoil**, Lic. Laurian, Botoşani.
68. **Floareş I. Constantin**, Lic. „Ferdinand I", Bacău.
69. **Corpade I. Alexandru**, Lic. M. Viteazul, Alba Iulia.
70. **Preda P. Ghiorghiţă**, Lic. N. Bălcescu, Brăila.
71. **Dieneş E. Pavel**, Lic. Romano Catolic, Tg.-Secuiesc.
72. **Stan Gh. Ana Livia.** Lic. Traian Doda, Caransebeş.
73. **Vasile I. Florea**, Lic. Industrial, Craiova.
74. **Ceaje P. Lucian**, Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
75. **Gomboş I. Roman**, Lic. Teoretic Agr. Soroca.
76. **Magyarosi C. Emeric**, Lic. Reformat, Sf. Gheorghe.
77. **Tobă N. Gheorghe.** Lic. C. D. Loga, Timişoara.
78. **Costea I. Emil.** Şcoala Tehnică Aeronautică, Mediaş.
79. **Guţescu C. Dumitru**, Lic. de Băieţi, Petroşani.
80. **Leurzeanu I. Marius**, Lic. Moise Nicoară, Arad.
81. **Schneider D. Francise**, Lic. Prinz Eugen, Timisoara.
82. **Dumbravă I. Constantin**, Lic. Unirea, Focşani.
83. **Popescu Gh. Petre Mihai**, Lic. Fr. Buzeşti, Craiova.
84. **Schneider D. Francisc**, Lic. Prinz Eugen, Timişoara
85. **Acel F. Ioan.** Lic. Piaist, Timişoara.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărulor de ordine

Blaga Ovidiu (2362, 2427, 2435, 2437, 2450, 2452); *Ciucescu Paul* (2436, 2439, 2459, 2466, 2474, 2476, 2488, 2492, 2497, 2498); *Constantinescu Ilie* (N; P.); *Constantinescu Virgil* (P; 2436, 2450, 2455, 2459, 2468, 2474, 2473, 2478, 2480, 2487, 2488, 2490); *Costăchescu C. V.* (N); *Dăscălescu V. Mihai* (2420, 2424); *Deutsch Emeric* (1979, 2098, 2234, 2362, 2424, 2437, 2452, 2473, 2480, 2483, 2488, 2492); *Gherlan Vasile* (P; 2118, 2362, 2407, 2427, 2429, 2435, 2437, 2438, 2449, 2452, 2453, 2462, 2466, 2469, 2471, 2488, 2490, 2492, 2493, 2497, 2499); *Giurconiu Mihai* (1668, 1689, 1704, 1777, 1874, 1955, 1971, 1979, 2234, 2253, 2263, 2276, 2279); *Haret Radu* (2417, 2454, 2486); *Hurezeanu Romulus* (2043, 2084, 2424, 2454, 2473, 2497); *Iacob Eugen* (P.); *Man Iosif* (2118, 2428, 2490, 2492, 2497); *Man Octavian* (2492, 2497, 2502); *Măncescu Ion* (2118, 2416, 2439, 2450, 2455, 2473, 2474, 2476, 2480, 2488); *Marinescu D.* (2420, 2458); *Moldovan Mircea* (2459, 2460, 2467, 2468, 2492, 2493); *Munteanu Giuseppe* (2437, 2452, 2456, 2471, 2492); *Neguţ Ion* (N; P; 2052, 2410, 2424, 2454, 2473, 2480, 2491, 2496, 2497); *Nemeth Eugen* (P; 2452, 2490, 2496, 2497); *Novac Ion* (P; 1272, 1953, 1967, 2018, 2025, 2033, 2039, 2052, 2057, 2063, 2086, 2087, 2094, 2095, 2096, 2110, 2111, 2477, 2480, 2483, 2484, 2486, 2488, 2490, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498); *Pali Sergiu* (2418, 2476, 2490, 2493, 2497, 2499, 2501), *Pantea Alexandru* (P; 2407, 2449, 2453, 2454, 2462, 2465, 2466, 2469, 2471, 2488, 2490, 2492, 2493, 2497, 2499); *Pătrăşcoiu Pavel* (2413); *Peţanca Dacia* (2450. 2453, 2469, 2490); *Pisanca Ionel* (2331, 2345, 2488, 2493); *Puşcaşiu Silviu* (2383, 2411, 2436, 2459, 2492); *Râmboiu Septimiu* (2420, 2423, 2424, 2427, 2428, 2473); *Richard Ghertler* (2454, 2496, 2497, 2498); *Ristea Gh.* (2411, 2413, 2427, 2429, 2433, 2450, 2452, 2456, 2458, 2488); *Roman C.* (2362, 2435, 2443, 2454, 2466, 2488); *Săsărman Mihai* (2362, 2407, 2420, 2427, 2435); *Teodorescu Petre* (N; P; 2004, 2222, 2323, 2488, 2489, 2490, 2496, 2497, 2498); *Turbuţiu Gh.* (2362, 2407, 2427, 2428, 2435 2437, 2438); *Târcomnicu C-tin* (2429, 2431, 2436, 2439 2440, 2447, 2450, 2454, 2458, 2459, 2466, 2473, 2474 2476, 2480, 2488, 2492); *Vasile Vasu* (P); *Vişa Eugen* (A N; P; 2965, 2483); *Wegener Eugen* (P; 2421, 2454).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 30.000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Nu se primesc de la corespondenţi manuscrise iscălite sub pseudonim.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

ANUL XXVII. MAIU 1947 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 10000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 240.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **N. N. MIHAILEANU:** CONICE SI ECUATII DIFERENTIALE LINEARE.
2. **V. ALACI:** CONDITIILE PENTRU CA ECUATIA DIFERENTIALA (1) $(a_1x+b_1y)dx+(a_2x+b_2y)dy=0$. SA REPREZINTE CONICE, SAU CUBICE.
3. NOTA MATEMATICA 6, 7.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 2168, 2439, 2443, 2450, 2454, 2770.
6. PROBLEME PROPUSE: 2512 - 2520.
7. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul ori cărui nou abonament şi al oricărui volum este de 100.000 lei.

Ne vedem obligaţi cu părere de rău, faţă de enorma scumpire a tiparului, de a mări costul abonamentului la 100.000 (una sută mii) lei. Factura pentru No. 2 al R. M. T. este de 5,760.000 lei, cu tendinţa de urcare pentru viitor.

Acum, după 26 ani de apariţie regulată, R. M. T. este grav ameninţată de a dispare. Ar fi o diminuare a spiritualităţii ştiinţifice a Ţării noastre.

Facem apel la corespondenţi noştrii cari s'au abonat deja de a completa abonamentul până la suma de 100.000 lei

---

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Dr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Politehnica Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 100000 (una sută mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anii: I, XXIII şi XXV, epuizaţi. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 100.000 lei fiecare.

ANUL XXVII — No. 3. TIMISOARA, MAIU 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 10000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . .100.000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Politehnica Timișoara.

CONICE ȘI ECUAȚII DIFERENȚIALE LINEARE

DE

N. N. MIHĂILEANU

1. Considerăm ecuația diferențială lineară de primul ordin

(1) $$(a_1 x + b_1 y)\,dx + (a_2 x + b_2 y)\,dy = 0.$$

Față de transformările lineare, ecuația (1) are invarianții relativi

$$h = a_2 - b_1 \quad \text{și} \quad k = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

și invariant absolut

$$p = \frac{h}{\sqrt{k}}.$$

Ne propunem să căutăm condiția ca integralele ecuației (1) să reprezinte conice.

Un factor integrant λ al ecuației (1) trebue să verifice condiția

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}(a_1 x + b_1 y) - \frac{\partial \lambda}{\partial x}(a_2 x + b_2 y) = \lambda (a_2 - b_1).$$

Dacă $h = 0$ putem lua λ constant, deci (1) este diferențială exactă. În adevăr să înlocuim $b_1 = a_2$ și scriem

$$a_1 x\,dx + b_1 (y\,dx + x\,dy) + b_2 y\,dy = 0$$

care se integrează imediat și ne dă familia de conice

(2) $$a_1 x^2 + 2 b_1 x y + b_2 y^2 = C$$

C fiind o constantă arbitrară.

2. Presupunem $h \neq 0$ și fie

(3) $$f(x,y) = \alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} x y + \alpha_{22} y^2 + 2\alpha_{13} x + 2\alpha_{23} y + \alpha_{33}$$

o formă de gradul doi în două variabile; pentruca ecuația (1) să admită o integrală de forma $f(x,y)=0$, va trebui să existe un factor integrant λ astfel ca

$$\lambda (a_1 x + b_1 y)\,dx + \lambda (a_2 x + b_2 y)\,dy = d\,F(f),$$

F fiind o funcție arbitrară de f. Rezultă

$$\lambda (a_1 x + b_1 y) = 2 F'_f \cdot (\alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13}),$$
$$\lambda (a_2 x + b_2 y) = 2 F'_f \cdot (\alpha_{12} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23})$$

deci

$$(a_1 x + b_1 y)(\alpha_{12} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23}) = (a_2 x + b_2 y)(\alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13}).$$

Adică

$$a_1 \alpha_{12} = a_2 \alpha_{11}, \quad b_1 \alpha_{22} = b_2 \alpha_{12},$$
$$a_1 \alpha_{22} - b_2 \alpha_{11} = \alpha_{12}(a_2 - b_1)$$
$$a_1 \alpha_{23} = a_2 \alpha_{13}, \quad b_1 \alpha_{23} = b_2 \alpha_{13}.$$

Ultimele relații dau $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$; scoatem apoi

$$\alpha_{11} = \frac{a_1}{a_2}\alpha_{12}, \quad \alpha_{22} = \frac{b_2}{b_1}\alpha_{12}$$

și a treia relație se reduce la

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 - b_1) = 0.$$

Condiția căutată este deci $h = 0$, sau $k = 0$. Condiția $k = 0$ poate fi acceptată ca improprie; în adevăr ea se scrie

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k.$$

Ecuația (1) devine

$$dx + k\,dy = 0,$$

cu familia de integrale, linii drepte

$$x + k y = C.$$

3. Presupunem $h \neq 0$, $k \neq 0$. Fie

(4) $$f(x,y) = \alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} xy + \alpha_{22} y^2 + 2\alpha_{13} x + 2\alpha_{23} y + \alpha_{33}$$
(5) $$g(x,y) = \beta_{11} x^2 + 2\beta_{12} xy + \beta_{22} y^2 + 2\beta_{13} x + 2\beta_{23} y + \beta_{33}.$$

Problema generală constă în a determina relația dintre a_1, a_2, b_1, b_2 astfel ca să existe un factor λ și o funcție arbitrară F de raportul dintre f și g, pentru care

$$\lambda (a_1 x + b_1 y)\,dx + \lambda (a_2 x + b_2 y)\,dy = d\,F\left(\frac{f}{g}\right).$$

Trebue să avem, cu un factor ϱ uşor de determinat,

$$\lambda(a_1 x + b_1 y) = \varrho\left[g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}\right]$$

$$\lambda(a_2 x + b_2 y) = \varrho\left[g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}\right],$$

sau, eliminând pe λ

$$(a_1x+b_1y)\left(g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}\right) = (a_2x+b_2y)\left(g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}\right),$$

adică

$$f\left[(a_2 x + b_2 y)\frac{\partial g}{\partial x} - (a_1 x + b_1 y)\frac{\partial g}{\partial y}\right] =$$

$$g\left[(a_2 x + b_2 y)\frac{\partial f}{\partial x} - (a_1 x + b_1 y)\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

şi desvoltat

$$(\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2+2\alpha_{13}x+2\alpha_{23}y+\alpha_{33})\times$$
$$[(a_2x+b_2y)(\beta_{11}x+\beta_{12}y)-(a_1x+b_1y)(\beta_{12}x+\beta_{22}y)] =$$
$$(\beta_{11}x^2+2\beta_{12}xy+\beta_{22}y^2+2\beta_{13}x+2\beta_{23}y+\beta_{33})\times$$
$$[(a_2x+b_2y)(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y)-(a_1x+b_1y)(\alpha_{11}x+\alpha_{22}y)].$$

4. Formăm tabloul

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{matrix} \right\|$$

şi notăm p_{ik} minorii formaţi cu elementele coloanelor i şi k (începând cu α); de ex.:

$$p_{34} = \alpha_{22}\beta_{13} - \alpha_{13}\beta_{22}.$$

Identificăm succesiv coeficienţii în $x^4, x^3, x^2, y^2 \ldots$ şi obţinem

(6) $$p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0;$$

identificăm termenii omogeni de gradul trei şi avem

(7) $$-a_2 p_{14} + a_1(-p_{15} + 2p_{24}) = 0,$$

(8) $$2a_1 p_{34} + b_1(2p_{24} - p_{15}) - 2a_2 p_{15} - b_2 p_{14} = 0,$$

(9) $$a_1 p_{35} + a_2(p_{34} - 2p_{25}) + 2b_1 p_{34} - 2b_2 p_{15} = 0,$$

(10) $$b_1 p_{35} + b_2(p_{34} - 2p_{25}) = 0;$$

identificăm termenii omogeni de gradul doi

(11) $$a_1(p_{26} - 2p_{45}) - a_2 p_{16} = 0$$

(12) $$a_1 p_{36} + b_1(p_{26} - 2p_{45}) - a_2(p_{26} + 2p_{15}) - b_2 p_{16} = 0$$

(13) $$b_1 p_{36} - b_2(p_{26} + 2p_{45}) = 0,$$

iar termenii de gradul întâi, dau

(14) $$-a_2 p_{46} + a_1 p_{56} = 0$$

(15) $$-b_2 p_{46} + b_1 p_{56} = 0.$$

5. Fiindcă $k \neq 0$, ultimele două relaţii dau

(16) $$p_{46} = p_{56} = 0,$$

ceeace atrage

(17) $$p_{45} = 0$$

Relaţiile (11), (12), (13) se simplifică la forma

$$a_1 p_{26} - a_2 p_{16} = 0$$
$$a_1 p_{36} + b_1 p_{26} - a_2 p_{26} - b_2 p_{16} = 0$$
$$b_1 p_{36} - b_2 p_{26} = 0,$$

adică un sistem omogen în p_{16}, p_{26}, p_{36} de determinant, $hk \neq 0$, deci

(18) $$p_{16} = p_{26} = p_{36} = 0.$$

Ceilalţi coeficienţi devin

$$p_{14} = \alpha_{11}(\beta_{13} - \alpha_{13}), \quad p_{15} = \alpha_{11}(\beta_{23} - \alpha_{23}),$$
$$p_{24} = \alpha_{12}(\beta_{13} - \alpha_{13}), \quad p_{25} = \alpha_{12}(\beta_{23} - \alpha_{23}),$$
$$p_{34} = \alpha_{22}(\beta_{13} - \alpha_{13}), \quad p_{35} = \alpha_{22}(\beta_{23} - \alpha_{23}),$$

sau

$$\frac{p_{15}}{p_{14}} = \frac{p_{25}}{p_{24}} = \frac{p_{35}}{p_{34}} = r;$$

mai notăm

$$\alpha_{12} : \alpha_{11} = \alpha, \quad \alpha_{22} : \alpha_{11} = \beta$$

şi ecuaţiile (7), (8), (9), (10) devin

$$-a_2 + a_1(-r + 2\alpha) = 0$$
$$2a_1\beta + b_1(2\alpha - r) - 2a_2 r - b_2 = 0$$
$$a_1 r\beta + a_2(\beta - 2r\alpha) + 2b_1\beta - 2b_2 r = 0$$
$$b_1 r\beta + b_2(\beta - 2r\alpha) = 0.$$

Scoatem din prima şi ultima pe α şi β şi înlocuim în celelalte, obţinem

$$2a_1 r^2 - b_1 r - b_2 = 0, \quad a_1 r^2 + a_2 r - 2b_2 = 0$$

şi eliminarea lui r duce la

(19) $$2(a_2 - b_1)^2 = 9(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

6. Presupunem condiţia (19) îndeplinită; deci

$$b_2 = \frac{(2a_2 + b_1)(2b_1 + a_2)}{9a_1},$$

rezultă

$$r = \frac{a_2 + 2b_1}{3a_1}, \quad \alpha = \frac{2a_2 + b_1}{3a_1}, \quad \beta = \alpha^2.$$

7. Din $p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$ şi $p_{16} = p_{26} = p_{36} = 0$ rezultă

$$\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}=\frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}}=\frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}}=\frac{\alpha_{33}}{\beta_{33}},$$

iar din $p_{45}=p_{46}=p_{56}$ urmează,

$$\frac{\alpha_{13}}{\beta_{13}}=\frac{\alpha_{23}}{\beta_{23}}=\frac{\alpha_{33}}{\beta_{33}}.$$

Şirurile precedente nu pot fi egale căci atunci $f:g$ s'ar reduce la o constantă; este atunci necesar ca

(20) $$\alpha_{33}=\beta_{33}=0.$$

Putem lua, din cauza factorului de care dispunem

$$\beta_{11}=\alpha_{11},\quad \beta_{12}=\alpha_{12},\quad \beta_{22}=\alpha_{22};$$

dar în $F(f:g)$ putem face combinaţia

$$\frac{f}{g-f}=\frac{1}{-1+\frac{1}{f:g}}=G\left(\frac{f}{g}\right);$$

deci putem lua $\beta_{11}=\beta_{12}=\beta_{22}=0$. Avem apoi $\beta_{23}=\alpha_{23}$, $\beta_{33}=\alpha_{33}$; facem combinaţia

$$\frac{f-g}{g}=\frac{f}{g}-1=H\left(\frac{f}{g}\right),$$

rămâne astfel sub forma cea mai simplă

$$f=(x+\alpha y)^2\qquad g=x+ry.$$

In concluzie, în ipoteza (19) ecuaţia (1) admite integralele

(21) $$(x+\alpha y)^2=C(x+ry).$$

8. Observând că

$$\alpha r=\frac{b_2}{a_1},\quad \frac{a_2}{a_1}=2\alpha-r,\quad \frac{b_1}{a_1}=2r-\alpha$$

ecuaţia diferenţială, în condiţiile problemei, devine

(22) $$[x+(2r-\alpha)y]dx+[(2\alpha-r)x+\alpha ry]dy=0.$$

Ea admite factorul integrant

$$\lambda=\frac{x+\alpha y}{(x+ry)^2}$$

şi integralele (21).

9. Ecuaţia (22) se integrează lesne ca ecuaţie omogenă, cu $y=tx$ deci

$$\frac{dx}{x}+\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha t}-\frac{r}{1+rt}\right)dt=0 \quad *_{*}^{*} \quad \frac{(x+\alpha y)^2}{x+ry}=C.$$

10. *Exemple:* ecuaţia

$$(3x+y)\,dx+(4x+2y)\,dy=0,$$

admite integrala

$$(x+y)^2=C(3x+2y).$$

Ecuaţia

$$(4y-2x)\,dx-(3y-x)\,dy=0,$$

admite integrala

$$(x-y)^2=C(2x-3y)$$

* * *

In concluzie, *ecuaţia diferenţială lineară (1) de ordinul întâi admite conice curbe integrale, când* $h=0$, $k=0$, *sau* $p=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. $(2h^2=9k)$ *şi numai în aceste cazuri.* In general integralele ei sunt curbele anarmonice, adică transformatele proiective ale spiralei logaritmice, ale exponenţialei sau ale curbelor normale parabolice, $y=x^k$.

CONDIŢIILE PENTRU CA ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ

(1) $$(a_1x+b_1y)\,dx+(a_2x+b_2y)\,dy=0.$$

SĂ REPREZINTE CONICE, SAU CUBICE

DE

V. ALACI

1. In articolul precedent, d-l *N. N. Mihăileanu*, folosind noţiunea de factor integrant, găseşte condiţiile ca ecuaţia diferenţială (1) să reprezinte conice.

Folosind însă o metodă directă, obicinuită, vom stabili în cele ce urmează rezultate mai generale, în particular vom găsi *condiţiile ca ecuaţia diferenţială* (1) *să reprezinte conice, sau cubice.*

2. In adevăr, ecuaţia diferenţială (1), care se mai poate scri

(2) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y},$$

în virtutea substituţiei

(3) $$y=tx,\ \text{deci}\ \frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx},$$

devine

$$x\frac{dt}{dx}=-\frac{a_1+b_1t}{a_2+b_2t}-t=-\frac{a_1+(a_2+b_1)t+b_2t^2}{a_2+b_2t},$$

sau

$$\frac{dx}{x}=-\frac{(a_2+b_2t)\,dt}{b_2t^2+(a_2+b_1)t+a_1}.$$

Integrând, avem

$$\log x = -\frac{1}{2}\int \frac{2b_2 t + a_2 + b_1}{b_2 t^2 + (a_2 + b_1) t + a_1}\, dt + \frac{b_1 - a_2}{2}\int \frac{dt}{b_2 t^2 + (a_2 + b_1) t + a_1},$$

sau

$$\lg x = -\lg \sqrt{b_2 t^2 + (a_2 + b_1) t + a_1} + \frac{b_1 - a_2}{2\sqrt{(a_2 + b_1)^2 - 4 a_1 b_2}} \lg \frac{t - t_1}{t - t_2} + \log C_1, \tag{4}$$

unde t_1, t_2 sunt rădăcinile reale, sau imaginare ale trinomului $b_2 t^2 + (a_2 + b_1) t + a_1$, anume

$$t_1 = \frac{-(a_2 + b_1) - \sqrt{(a_2 + b_1)^2 - 4 a_1 b_2}}{2 b_2}, \qquad t_2 = \frac{-(a_2 + b_1) + \sqrt{(a_2 + b_1)^2 - 4 a_1 b_2}}{2 b_2}. \tag{5}$$

Am presupus evident, că

$$(a_2 + b_1)^2 - 4 a_1 b_2 \neq 0.$$

Relaţia (4) se mai poate scri

$$\lg x \sqrt{b_2 (t - t_1)(t - t_2)} = \lg \sqrt{\left(\frac{t - t_1}{t - t_2}\right)^k} + \log C_1, \tag{6}$$

unde am notat

$$k = \frac{b_1 - a_2}{\sqrt{(a_2 + b_1)^2 - 4 a_1 b_2}}. \tag{7}$$

Punând ecuaţia (6) sub forma

$$\lg x \sqrt{b_2 \frac{(t - t_2)^{k+1}}{(t - t_1)^{k-1}}} = \lg C_1$$

şi înlocuind $t = \frac{y}{x}$, dedusă din (2), obţinem

$$\sqrt{b_2 \frac{(y - t_2 x)^{k+1}}{(y - t_1 x)^{k-1}}} = C_1,$$

sau

$$(y - t_2 x)^{k+1} = C (y - t_1 x)^{k-1}, \quad \left(C = \frac{C_1^2}{b_2}\right). \tag{1'}$$

Ecuaţia diferenţială (1) admite astfel, în cazul $(a_2 + b_1)^2 - 4 a_1 b_2 \neq 0$, soluţia (1'), unde t_1, t_2 sunt date de (5), iar k are valoarea din (7).

Să discutăm acum soluţia (1') după valorile lui k.

1°. *Pentru* $k = 0$, *adică* $b_1 = a_2$, soluţia (1') devine

$$(y - t_2 x)(y - t_1 x) = C, \tag{8}$$

adică, *o familie de conice.*

2° *Pentru* $k = \pm 1$, *adică*

$$b_1 - a_2 = \pm \sqrt{(b_1 + a_2)^2 - 4 a_1 b_2},$$

sau

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

soluţia (1') devine

$$(y - t_2 x)^2 = C, \quad \text{sau} \quad (y - t_1 x)^2 = C,$$

adică, *familiile de drepte*

$$b_2 y + b_1 x = C. \tag{9}$$

3°. *Pentru* $k = \pm 2$, adică

$$b_1 - a_2 = \pm 2\sqrt{(b_1 - a_2)^2 + 4 (a_2 b_1 - 4 a_1 b_2)},$$

sau

$$3 (a_2 - b_1)^2 = 16 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

soluţia (1') devine

$$(y - t_2 x)^3 = C (y - t_1 x), \quad \text{sau} \quad (y - t_1 x)^3 = C (y - t_2 x),$$

adică, *familii de cubice.*

4°. *Pentru* $k = \pm 3$, adică

$$b_1 - a_2 = \pm 3\sqrt{(b_1 - a_2)^2 - 4 (a_1 b_2 - a_2 b_1)},$$

sau

$$2 (b_1 - a_2)^2 = 9 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

soluţia (1') devine

$$(y - t_2 x)^4 = C (y - t_1 x)^2, \quad \text{sau} \quad (y - t_1 x)^4 = C (y - t_2 x)^2,$$

care se descompun în

$$(y - t_2 x)^2 = \pm C_1 (y - t_1 x), \text{ sau } (y - t_1 x)^2 = \pm C_1 (y - t_2 x) \quad (C_1 = \sqrt{C}).$$

Soluţie (1') *reprezintă*, în acest caz, *conice.*

5°. *Pentru* $k = \pm 4$, adică

$$b_1 - a_1 = \pm 4\sqrt{(b_1 - a_2)^2 - 4 (a_1 b_2 - a_2 b_1)},$$

sau

$$15 (b_1 - a_2)^2 = 64 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

soluţia (1') devine

$$(y - t_2 x)^5 = C (y - t_1 x)^3, \text{ sau } (y - t_1 x)^5 = C (y - t_2 x)^3$$

care reprezintă curbe de gradul al 5-lea.

6°. *Pentru* $k = \pm 5$, adică

$$b_1 - a_2 = \pm 5\sqrt{(b_1 - a_2)^2 - 4 (a_1 b_2 - a_2 b_1)},$$

sau

$$6 (b_1 - a_2)^2 = 25 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

soluţia (1') devine

$(y-t_2x)^6=C(y-t_1x)^4$, sau $(y-t_1x)^6=C(y-t_2x)^4$, care se descompun în

$(y-t_2x)^3=\pm\sqrt{C}(y-t_1x)^2$, sau $(y-t_1x)^3=\pm\sqrt{C}(y-t_2x)^2$ şi *reprezintă cubice.*

3. Alte cazuri particulare, precum şi cazul lăsat la o parte $(a_2+b_1)^2-4a_1b_2=0$, nu mai prezintă importanţă pentru studiul nostru.

In rezumat: *soluţia ecuaţiei diferenţiale* (1), *reprezintă conice,*

pentru:

$\overline{|b_1=a_2|}$, sau pentru $\overline{|2(b_1-a_2)^2=9(a_1b_2-a_2b_1)|}$;

ea reprezinte cubice,

pentru: $\overline{|3(a_2-b_1)^2=16(a_1b_2-a_2b_1)|}$,

sau pentru: $\overline{|6(b_1-a_2)^2=25(a_1b_2-a_2b_1)|}$,

şi numai în aceste cazuri.

NOTE MATEMATICE

6. — **Théorème.** *Les nombres de la forme* $4p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots$, $p, q, r\ldots$ *étant des nombres premiers de la forme* $4s+1$, *admettent autant de représentations dela forme* x^2+y^2 *que de la forme* x^2-y^2. *Ces nombres sont les seul à jouir de cette propriété.*

En effet, le nombre de décompositions

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1\ldots}{2}$$

si l'un au moins des exposants est impair,

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2}+\frac{1}{2}$$

si tous les exposants sont pairs et si l'on compte la décomposition triviale $\left(p^{\frac{\alpha}{2}}q^{\frac{\beta}{2}}r^{\frac{\gamma}{2}}\right)^2+0^2$.

Le nombre de décompositions x^2+y^2 n'est pas altéré si l'on multiple le nombre en question par une puissance de 2. Car $2(x^2+y^2)$ n'admet que la décomposition unique $(x+y)^2+(x-y)^2$.

Le nombre de représentations par la forme x^2-y^2 de $N=2^a p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots$, p, q et r désignent ici des nombres premiers quelconques différents de 2, est donné par l'expression

$$\frac{(a-1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2}$$

si l'un au moins des exposants est impair, et par

$$\frac{(a-1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2}+\frac{1}{2},$$

si tous les exposants sont pairs et si l'on compte la représentation triviale $\left(2^{\frac{a}{2}}p^{\frac{\alpha}{2}}q^{\frac{\beta}{2}}r^{\frac{\gamma}{2}}\right)^2-0^2$.

Si $a=2$, le nombre de représentatios x^2-y^2 est

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2},$$

respectivement

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2}+\frac{1}{2}.$$

Le nombre $N=4p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots$, p, q, r, étant premiers et congrues à 1 (module 4), admet donc le même nombre de représentation par chacune des formes x^2+y^2 et x^2-y^2.

Réciproquement, pour que les 2 nombres de représentations soit égaux, il faut d'abord que les nombres premiers p, q, $r\ldots$ soient$\equiv 1$ (module 4), et l'on doit avoir en autre

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1\ldots}{2}+k=\frac{(a-1)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots}{2}+k$$

k étant egal à 0 ou $\frac{1}{2}$, suivant les circonstances susmentionnées.

Donc $\gamma=2$, et $N=4p^\alpha q^\beta r^\gamma\ldots$

Exemples numériques

a) $N=4.5.13=260$

$260=16^2+2^2=14^2+8^2=66^2-64^2=18^2-8^2$.

b) $N=4.5^2=100$

$100=8^2+6^2=10^2+0^2=26^2-24^2=10^2-0^2$.

c) $N=4.5^3=500$

$500=20^2+10^2=22^2+4^2=126^2-124^2=30^2-20^2$.

d) $N=4.5=20$.

$20=4^2+2^2=6^2-4^2$.

A. GLODEN

7. — *A propos du triangle orthique.*

1. Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs A A′; B B′, C C′ d'un triangle A B C que nous supposons acutangle, pour fixer les idées.

Les triangles AB′C′, BC′A′ CA′B′, d'orthocentres h_1, h_2, h_3 sont semblables au triangle A B C, les rapports de similitude étant cos A, cos B, cos C, et les triangles A′ B′ C′ et $h_1\, h_2\, h_3$ sont symétriques par rapport au centre du cercle de *Taylor* du triangle A B C. Cette propriété évidente sur la figure, permet de dire que *les droites* A′ h_1, B′ h_2, C′ h_3 *joignant les pieds des hauteurs de* A B C *aux orthocentres des triangles* A B′ C′, B C′ A′, C A′ B′ *concourent au centre du cercle de Taylor du triangle fondamental.* Ces propriétés ne sont pas nouvelles ; les suivantes sont peut-être moins connues.

2. Soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit (I) au triangle A B C sur les côtés BC, CA, AB, α, β, γ les centres des cerles inscrits aux triangles A B′ C′, B C′ A′, C A′ B′. Si M_b est le point de contact du cercle (β) sur B C, on a, avec les notations d'usage,

$$B M_a : B F = (p - b) \cos B : (p - b) = \cos B ;$$

donc la droite F M_a se confond avec la hauteur du triangle B D F issue de F et il en est de même pour F α et E α, E γ et D γ dans les triangles E A F et D C E.

Les propriétés suivantes résultent de cette remarque. *Les triangles* D E F *et* $\alpha\beta\gamma$ *sont symétriques par rapport au centre* O_9', *du cercle des neuf points qui leur est commun.* O_9' *se confond avec le milieu de la distance du centre* I *du cercle inscrit* (I) *à l'orthocentre* I′ *du triangle* D E F *situé sur la ligne des centres* IO *des cercles inscrit et circonscrit à* A B C *et qui coïncide donc avec le centre du cercle circonscrit au triangle* $\alpha\beta\gamma$.

Ajoutons ces remarques dont la démonstration est facile et qui constitueront d'excellents exercices.

a) *Les quadrangles* B $\beta\gamma$ C, C $\gamma\alpha$ A, A $\alpha\beta$ B *sont inscriptibles dans des cercles de centres* O_a, O_b, O_c.

b) *Le cercle circonscrit au triangle* O_a O_b O_c *est concentrique au cercle circonscrit au triangle* A B C, *son rayon est égal à la somme* R + r *des rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle fondamental.*

V. THÉBAULT

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, Nr. 8, Aprilie 1947. Două relaţii între distanţele mutuale ale unor puncte, de *Andrei Dobrescu.* Aplicaţii ale noţiunilor de geometria maselor, la demonstrarea câtorva teoreme de *D.V.Ionescu.* Raportul comisiunii pentru premiul „Ing. *Alexandru Roşu*", de Ing. *A. D. Bunescu*, Avocat *Alexandru Al. Roşu*, Ing. *D. Stoica.* Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Gh. Th. Gheorghiu*: 67 examene de admiterc la Politehnicele din România. Fascicola I, litografiată, ed. II-a. Conţine 142 probleme de geometrie plană şi în spaţiu. O recomandăm călduros elevilor şi studenţilor.

3. *A. Gloden:* Liste des formes linéaires des nombres dont le carré se termine dans le système décimal par un tranche donnée de 4 chiffres.

4. *A. Gloden:* Quelques considérations sur l'évolution des théories concernant la structure nucléaire. II. Sur les forces agissant à l'interieur des noyaux atomiques. (Luxembourg 1940).

5. *A. Gloden:* Note concernant les travaux d'*Eddington.*

6. *A. Gloden:* Le centenaire de la découverte de Neptune par *Le Verier.*

7. *A. Gloden:* Sur la répartition spatiale et le nombre des étoiles fixes.

8. Ing. *Alexandru Stoenescu:* Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant. (Extrait du Bull de l'École Polytechnique de Bucurest, 1941).

9. Ing. *Alexandru Stoenescu:* Sur les systèmes des forces sous l'action desquelles un mobile parcours un trajectoire donnée. (Id. 1942).

10. Ing. *Alexandru Stoenescu:* Sur les systèmes des forces sous l'astion desquelles un mobile parcours une trajectoire donnée (Id. 1943).

11. Ing. *Alexandru Stoenescu:* Generalizarea formulei lui *Binet*, (G. M. 1945).

12. Ing. *Alexandru Stoenescu:* Asupra generalizării formulei lui *Binet.* (G. M. 1946).

13. Ing. *Alexandru Stoenescu:* Extindere a unei metode întrebuinţată la studiul fenomenelor mecanice. (G. M. 1946).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 2168. — *Să se demonstreze pe cale geometrică relaţia*

$$4 \operatorname{tg} 15^0 = 1 + \operatorname{tg}^2 15^0$$

G-L. GH. BUICLIU

Soluţia I. Considerăm triunghiul echilateral ABC în care ducem înălţimea AD şi bisectoarea AE a unghiului B A D. Avem în triunghiul E D A

$$\frac{E D}{D A} = \operatorname{tg} 15^0 \tag{1}$$

Proprietatea bisectoarei, ne dă în triunghiul BAD:

$$\frac{E D}{D A} = \frac{E B}{A B} = \frac{E B}{a} \tag{2}$$

unde am notat cu a latura triunghiului echilateral. Dar

$$EB = BD - ED = \frac{a}{2} - ED$$

aşa că (2) devine

$$\frac{ED}{DA} = \frac{\frac{a}{2} - ED}{a} \quad \therefore \quad ED = \frac{a \cdot DA}{2(a + DA)}.$$

Dar în triunghiul echiateral înălţimea DA este dată de

$$DA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

aşa că

$$(3) \qquad \frac{ED}{DA} = \frac{a}{2(a + DA)} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \operatorname{tg} 15^0$$

Din (1) şi (3) se scoate

$$\frac{4 \cdot ED}{DA} - \frac{\overline{ED}^2}{\overline{DA}^2} = \frac{4}{2 + \sqrt{3}} - \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} = 1$$

ceia ce demonstrează proprietatea.

Această soluţie a fost dată de d-l *Tutor Aurel* (Liceul „Radu Negru", Făgăraş).

Soluţia II. Fie OAT un triunghiu dreptunghic în care unghiul OAT este de 15^0, iar $OA = 1$. Se complectează dreptunghiul $OATN$ şi fie P intersecţia lui TN cu perpendiculara în O pe OT, I mijlocul lui TN şi S mijlocul lui OI. Avem evident

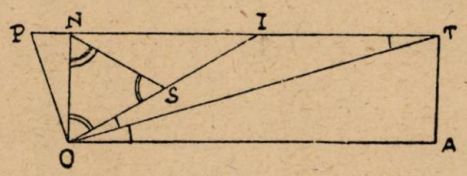


Fig. 1.

$$(1) \qquad \overline{AT} = \operatorname{tg} 15^0$$

$$(2) \qquad \overline{OT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2.$$

Triunghiul TOP fiind dreptunghic avem

$$IP = IT = IO.$$

Dar şi în triunghiul dreptunghic ONI avem

$$NS = OS = IS$$

şi fiindcă unghiul NOS este de 60^0, triunghiul OSN este echilateral aşa că

$$OS = IS = ON = TA \quad \therefore \quad TP = 2\overline{IT} = 2OI = 4OS = 4ON$$

Acum se observă că în triunghiul dreptunghic TOP avem

$$\overline{TO}^2 = NT \cdot PT,$$

sau ţinând seamă de relaţiile precedente

$$(3) \qquad \overline{TO}^2 = NT \cdot 4ON = 4\overline{AT}.$$

Din (2) şi (3) se deduce

$$(4) \qquad 4\overline{AT} = \overline{OA}^2 + 4\overline{AT}^2.$$

Dacă OA este raza cercului trigonometric, (4) este tocmai relaţia de demonstrat.

Au dat aceste soluţie d-nii: *David Vasile* (Timişoara), *Godea I.* (student); *Goldiş T. Gh.* (Lic. „S. Vulcan" Beiu); *Hendli M. Martin* (student); *Muţiu S. Antin* (student); *Sabău Gh. Mihai* (P., T.).

Soluţia III. Fie AB latura dodecagonului înscris într'un cerc de rază $OA = R$ şi OC apotema acestui dodecagon. Avem

$$\sphericalangle AOB = 30^0, \quad \sphericalangle AOC = 15^0$$

$$AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{şi} \quad OC = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Se deduce

$$AB \cdot OC = \frac{R^2}{2} = \frac{\overline{OA}^2}{2}$$

$$(1) \qquad \therefore \quad 4\overline{AC} \cdot \overline{OC} = \overline{OA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2$$

Dar în triunghiul dreptunghic ACO în care raza OA este raza cercului trigonometric

$$AC = \operatorname{tg} 15^0$$

ceia ce înseamnă că (1) este tocmai relaţia din enunţ.

Au dat această soluţie d-nii: *Cherdivarencu I.* (P. T.). *Cristache Gh. Avram* (Lic. Brăila); *Enache Ion* (S-Lt. Rgt; 9 Vânători de gardă, Giurgiu); *Georgescu Nicolin, Giurconiu Gh. Mihail* (P., T.); *Mazilu Marius* (Lic. Caransebeş); şi *Ştefănescu M.* (Locot.).

Problema 2439. — *Să se arate că dacă*

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0, \end{cases}$$

atunci avem

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c}{\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c}.$$

ILIE CONSTANTINESCU

Soluție. Din relațiile date, deducem

$$\sin a = -(\sin b + \sin c) = -2\sin\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$\cos a = -(\cos b + \cos c) = -2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

și prin împărțire, găsim,

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\frac{b+c}{2}.$$

De aci rezultă

$$a + k\pi = \frac{b+c}{2}, \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

sau

$$b + c = 2a + 4k\pi.$$

Analog, avem

$$c + a = 2b + 2k\pi, \quad a + b = 2c + 2k\pi.$$

In virtutea acestor relații, putem scri

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\sin(a+b+c)}{\cos(a+b+c)} = \frac{\sin 3a}{\cos 3b} = \frac{\sin 3b}{\cos 3b} = \frac{\sin 3c}{\cos 3c}. \tag{1}$$

Aplicând în (1) o proprietate a rapoartelor egale, găsim

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c}{\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c},$$

care este relația cerută.

Soluții bune date de d-nii.: *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Paul* (Colegiul N. Filipescu), *Corduneanu C-tin* (Colegiul N. Filipescu), *Crăciunescu Victor* (Timișoara), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Moldovan Mircea* (Lic. Beiuș), *Manolescu Gh.* (P. T.), *Mâncescu Ion* (Colegiul N. Filipescu), *Munteanu Ion* (Colegiul N. Filipescu), *Novac Ioan* (P. T.), *Pisanca Ionel* (Colegiul Loga Timișoara), *Singer Adrian* (P. T.), *Stan Petru* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București), *Tincu C.* (P. T.) și *Târcomnicu C.* (Lic. Slatina).

Observare. Autorul problemei a dat următoarea soluție interesantă. Fie,

$$\alpha = \cos a + i\sin a, \quad \beta = \cos b + i\sin b, \quad \gamma = \cos c + i\sin c, \quad (i=\sqrt{-1}). \tag{1}$$

De aci rezultă în baza relațiilor date,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{2}$$

De altă parte, identitatea cunoscută

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)\times(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

în baza relației (2), devine

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma. \tag{3}$$

Inlocuind în (3) pe α, β, γ cu valorile din (1) și folosind formula lui *Moivre*, avem

$$(\cos 3a + i\sin 3a) + (\cos 3b + i\sin 3b) + (\cos 3c + i\sin 3c) = 3(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)(\cos c + i\sin c) = 3[\cos(a+b+c) + i\sin(a+a+c)].$$

Egalând părțile imaginare și cele reale, găsim

$$\sin(a+b+c) = \sin 3a + \sin 3b + \sin 3c$$
$$\cos(a+b+c) = \cos 3a + \cos 3b + \cos 3c,$$

prin urmare

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c}{\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c}.$$

Problema 2443. — *Să se stabilească identitatea*

$$i\log x = \operatorname{arc\,tg}\, i\frac{x^2\varphi(x)-1}{x^2\varphi(x)+1} - \operatorname{arc\,tg}\, i\frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1},$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

Soluție. Notăm cu α membrul al 2-lea și aplicăm tangenta, avem succesiv

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{i\frac{x^2\varphi(x)-1}{x^2\varphi(x)+1} - i\frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1}}{1 - \frac{[x^2\varphi(x)-1][\varphi(x)-1]}{[x^2\varphi(x)+1][\varphi(x)+1]}} =$$

$$= i\frac{[x^2\varphi(x)-1][\varphi(x)+1] - [x^2\varphi(x)+1][\varphi(x)-1]}{[x^2\varphi(x)+1][\varphi(x)+1] - [x^2\varphi(x)-1][\varphi(x)-1]}$$

$$= i\frac{-2\varphi(x)+2x^2\varphi(x)}{2\varphi(x)+2x^2\varphi(x)} = -i\frac{1-x^2}{1+x^2} = -i\frac{\frac{1}{x}-x}{\frac{1}{x}+x}$$

$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{-\log x} - e^{\log x}}{e^{-\log x}+e^{\log x}} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i(i\log x)} - e^{-i(i\log x)}}{e^{i(i\log x)}+e^{-i(i\log x)}}$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(i\log x).$$

Rezultă, abstracție făcând de un multiplu de π, că

$$a = i \log x.$$

Astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Corduneanu C-tin* (Colegiul N Filipescu), *Giurconiu Mihai* (P. T), *Haret Radu* (Buc.), *Mitric Aurel* (P. T.), *Munteanu Ioan* (Colegiul N. Filipescu), *Novac Ioan* (P. T.), *Pisanca Ionel* (Colegiul Loga), *Puşcaşiu Silviu* (P. T.), *Roman C-tin* (Timişoara), *Srager Adrian* (P. T.), *Stan Petru* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București) și *Tincu C-tin* (P. T.).

Problema 2450. — *Pentru ce valori reale a și b, ecuația*

$$x^6 - a^2 x^5 + b x^4 + x^2 - 4x + 13 = 0$$

admite rădăcina $2 + 3i$? $(i = \sqrt{-1})$.

Inlocuind în ecuația pe a și b cu valorile găsite, să se rezolve complect ecuația dată.

V. ALACI

Soluție. Ecuația dată având coeficienți reali (căci a și b sunt reali prin ipoteză), rezultă că dacă admite rădăcina $2 + 3i$, admite ca rădăcină și pe conjugata sa, $2 - 3i$, astfel că ea se divide prin produsul

$$(x-2+3i)(x-2-3i) = (x-2)^2 + 9 = x^2 - 4x + 13.$$

Cum ultima grupă de 3 termeni ai ecuației date este tocmai $x^2 - 4x + 13$, pentru ca primul membru al ecuației să se dividă prin $x^2 - 4x + 13$, trebuie ca și prima grupă de 3 termeni, adică

$$x^4 (x^2 - a^2 x + b)$$

să se dividă prin $x^2 - 4x + 13$. Trebuie deci să avem identic

$$x^2 - a^2 x + b \equiv x^2 - 4x + 13.$$

De aci deducem, $a^2 = 4$, $b = 13$, valori care introduse în ecuația dată ne dă

$$x^4 (x^2 - 4x + 13) + x^2 - 4x + 13 = 0,$$

sau

$$(x^2 - 4x + 13)(x^4 + 1) = 0.$$

Această ecuație este echivalentă cu ecuațiile $x^2 - 4x + 13 = 0$, cu rădăcinile: $x_{1,2} = 2 \pm 3i$, și

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$
$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = 0,$$

cu rădăcinile

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 \pm i)}{2} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}},$$

$$x_{5,6} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2} = -\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

Soluții date de d-ra *Diea Rodica* (Lic. Brăila), și de d-nii: *Balanișcu Chirică* (student, Cluj), *Blaga Ovidiu* (Lic. Cluj), *Constantinescu Paul* (Liceul Slatina), *Corduneanu C-tin* (Colegiul N. Filipescu), *Crăciunescu Victor* (P. T), *Deutsch Emeric*, *Diaconu Ion* (P. T.), *Gersch Paul* (Lic. Izraelit, Timișoara), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Guttmann Tiberiu* (P. T.), *Haret Radu* (București), *Lungu Ion Mărcuțiu Silviu* (Lic. Cluj), *Moldovan Mircea* (P. T.), *Munteanu Ion* (Colegiul, N. Filipescu), *Novac Ion* (P. T.), *Popescu I. Barbu* (P. T), *Romul Radu* (student, Cluj), *Șragher Adrian* (P. T.), *Tarcea Ioan* (P. T.), *Teiușan Horia* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Liceul M. Basarab, Bucuresti) și *Tincu C-tin* (P. T.).

Alte soluții mai lungi, date de d-nii: *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Coțiu Aurel* (student, Cluj), *Demian Traian, Diaconu Vasile* (Colegiul N. Filipescu), *Enache Ion* (Pitești), *Fleșeriu Eugen* (Alba-Iulia), *Ioan Simion* (student), *Junger Arnold* (Lic. Izraelit, Timișoara), *Lebovicz Ervin* (P. T.), *Măncescu Ion* (Colegiul, N. Filipescu), *Manolescu Gh.* (P. T.), *Marinescu D.* (Ploești), *Pali Sergiu* (P. T.), *Poenaru Gh.* (P. T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Puşcaşiu Silviu* (P. T.), *Petanca Dacia* (București), *Ristea Gh.* (Lic. M. Basarab, București), *Roman C-tin* (Colegiul, Loga T-șoara), *Stan Petru* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Liceul M. Basarab, București) și *Târcomnicu C.* (Lic. Slatina).

Problema 2454. — *Să se stabilească identitățile*

$$\sin^3\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin^3 a + \sin^3\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4}\sin a$$

$$\cos^3\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos^3 a + \cos^3\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4}\cos a$$

C-PT. MIRCEA GRUMAZESCU

Soluție. 1°. Observăm că,

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \sin a \cdot \frac{1}{2} + \cos a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin a + \sqrt{3}\cos a}{2}$$

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin a - \sqrt{3}\cos a}{2},$$

astfel că primul membru al identității 1-a, notat cu E, devine succesiv

$$E = \frac{(\sin a + \sqrt{3}\cos a)^3 + (\sin a - \sqrt{3}\cos a)^3}{8} + 2\sin^3 a$$

$$= \frac{2\sin^3 a + 18 \sin a \cos^2 a}{8} + 2\sin^3 a =$$

$$= \frac{\sin^3 a + 9 \sin a \cos^2 a + 8 \sin^3 a}{4} =$$

$$= \frac{9}{4} \sin a (\sin^2 a + \cos^2 a) = \frac{9}{4} \sin a.$$

Astfel, prima identitate este stabilită.

2°. De asemeni, fiindcă

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \cos a \cdot \frac{1}{2} - \sin a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\cos a - \sqrt{3}\sin a}{2},$$

$$\cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos a + \sqrt{3}\sin a}{2},$$

primul membru al identității a 2-a, notând cu F, devine succesiv

$$F = \frac{(\cos a - \sqrt{3}\sin a)^3 + (\cos a + \sqrt{3}\sin a)^3}{8} + 2\cos^3 a =$$

$$= \frac{2\cos^3 a + 18 \cos a \sin^2 a}{8} + 2\cos^3 a =$$

$$= \frac{\cos^3 + 9 \cos a \sin^2 a + 8 \cos^2 a}{4} =$$

$$= \frac{9}{4} \cos a (\cos^2 a + \sin^2 a) = \frac{9}{4} \cos a.$$

Identitatea 2-a este și ea stabilită.

Soluții date de d-nii: *Agapi Valeriu* (Lic. P. Neamț), *Almășan Lazăr* (Lic. P. Neamț), *Balanișcu Chirică* (student, Cluj), *Bălă C-tin* (Lic. Tg.-Jiu), *Bălăuță Mihai* (Lic. Deva), *Bergmann Mihai* (Lic. Cultura, București), *Bogza Mihai* (Roman), *Cernescu Nicolae, Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Virgil* (Lic. Statina), *Corduneanu C-tin* (Colegiul N. Filipescu), *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina) *Crăciunescu Victor* (P. T.), *Deutsch Emeric* (Timișoara), *Diaconu Vasile* (Colegiul N. Filipescu), *Fleșeriu Eugen* (Alba Iulia), *Gherlan Vasile* (Lic. Beiuș), *Ghersch Paul* (Liceul Timișoara), *Giurconiu Mihai* (P. T.). *Gancea C-tin, Guttman Tiberiu* (P. T.), *Haret Radu* (București), *Hurezeanu Romulus* (Lic. Tg.-Jiu), *Lebovics Ervin* (P. T), *Junger Arnold, Man Iosif* (P. T.), *Mâncescu Ion* (Colegiul, N., Filipescu), *Manolescu Gh.* (P. T.), *Mărcuțiu Silviu* (Cluj)-*Marinescu D.* (Ploești), *Moldovan Mircea* (P. T.), *Munteanu Ion* (Colegiul N. Fillpescu), *Neguț Ionel* (Lic. Tg.-Jiu), *Nedelcu Ulpius* (Șc. Of. de Geniu, București), *Novac Ioan* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuș), *Petanca Dacia* (București), *Pisanca Ionel* (Colegiul Loga, Timișoara), *Poenaru Gh.* (P. T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Pușcașu Silviu* (P. T.), *Richard Gertler* (Lic. Cultura, București), *Ristea Gh.* (Lic. M. Basarab, București), *Roman I.* (Colegiul Loga, Timișoara), *Romul Radu* (student, Cluj), *Simionescu G.* (Lic. Roman), *Stănilă Gh.* (Lic. Buzău), *Stern Tiberiu* (P. T.), *Stroescu Florea* (Caracal), *Teiușan Horia* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București), *Stan Petru* (P. T.), *Tincu C-tin* (P. T), *Turbuțiu Gh.* (Cluj) și *Târcomnicu C-tin* (Liceul Slatina).

Altă soluție. Autorul problemei și d-l *Tincu C-tin* (P. T.), au dat următoarea soluție:

1°. Ecuația,

$$x^2 - (\sin a)x + \sin^2 a - \frac{3}{4} = 0,$$

are rădăcinele

$$x_1 = \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right), \quad x_2 = \sin\left(a - \frac{\pi}{3}\right),$$

fiindcă,

$$x_1 + x_2 = \left(\sin a \cdot \frac{1}{2} + \cos a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ \left(\sin a \cdot \frac{1}{2} - \cos a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin a,$$

$$x_1 x_2 = \sin^2 a - \frac{3}{4}.$$

Se știe apoi că între rădăcinile $x_1, x_2, \ldots x_n$, ale ecuației

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n = 0,$$

și coeficienții ei, există relația

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = -p_1^3 + 3 p_1 p_2 - 3 p_3.$$

In cazul nostru,

$$n = 2, \; p_1 = -\sin a, p_2 = \sin^2 a - \frac{3}{4}, \; p_3 = 0,$$

astfel că

$$\sin^3\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^3\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \sin^3 a - 3\sin a\left(\sin^2 a - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= -2\sin^3 a + \frac{9}{4}\sin a,$$

sau

$$\sin^3\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin^3 a + \sin^3\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4}\sin a.$$

In acelaș mod se stabilește a 2-a identitate, observând că ecuația

$$x^2 - (\cos a)x + \cos^2 a - \frac{3}{4} = 0,$$

are rădăcinile,

$$x_1 = \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right), \quad x_2 = \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right).$$

Problema 2270. — *Să se construiască un triunghiu cunoscându-i un vârf, cercul celor nouă puncte şi distanţa între piciorul unei mediane şi al unei înălţime.*

G-L GH. BUICLIU

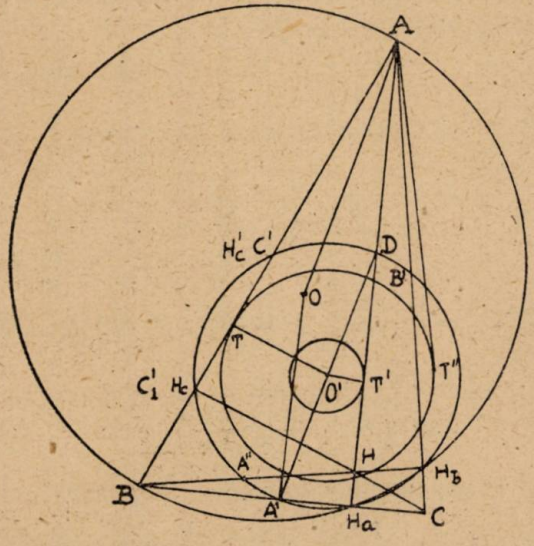
Soluţie. Fie ABC triunghiul de construit; A',B',C' mijloacele laturilor; H_a, H_b, H_c picioarele înălţimelor; H ortocentrul; O' centrul celor 9 puncte şi T proecţia lui O' pe AB.

Se cunosc prin enunţ cercul O', punctul A şi una din distanţele punctelor A', B', C' la H_a, H_b, H_c. Acest din urmă element nefiind precizat vor trebui considerate mai multe cazuri pentru a rezolva problema complect.

1°. *Se cunoaşte* $C'H_c$, sau $B'H_b$, ceiace este tot una. Coarda $C'H_c$ fiind cunoscută, ea este tangentă cercului de centru O' şi rază O'T, dată de

$$\overline{O'T}^2 = R'^2 - \frac{(C'H_c)^2}{4} = R'^2 - \frac{d^2}{4},$$

notând cu d distanţa dată şi cu A' raza cercului O'. Construcţia triunghiului este acum imediată. Se duce tangenta, AT la cercul O' (O'T), care taie pe O' în C' şi H_c. Cercul de centru C' şi rază C'A taie pe AC' în B, iar pe O' în H_a şi H_b. Se



duce BH_a şi AH_b care se întâlnesc în C şi se obţine *triunghiul* A B C *care răspunde problemei.*

Dacă punctul H_c din figură se notează cu H_a, iar H_a cu H_b se obţine o *a doua soluţie, triunghiul* A B H.

Dacă se schimbă ca notaţie punctele H_a şi C' între ele, în C_1' şi H_c', aşa cum se arată pe figură atunci intersecţiile cercului O' cu cercul de centru C_1' şi raza $C_1'A$, dacă există, mai pot da 2 soluţii.

Discuţie. Ca problema să fie posibilă trebuie mai întâi ca

$$C'H_c = d < 2R'$$

apoi

$$C'A \leq 2R' \quad \therefore \quad AT - C'T \leq 2R'$$

$$\therefore \quad \sqrt{D^2 - O'T^2} - \frac{a}{2} \leq 2R'$$

unde $D = AO'$. Inlocuind pe $\overline{O'T}^2$ prin $R^2 - \frac{d^2}{4}$ şi făcând calculele se deduce

$$D^2 \leq 5R^2 + 2dR' \tag{1}$$

Procedând la fel pentru cazul când mijlocul laturei A B este în C_1', se găseşte condiţia

$$D^2 \leq 5R'^2 - 2dR \tag{2}$$

Condiţiile (1) şi (2) pot fi şi simultane. Deci problema poate avea 1, 2, 3 sau 4 soluţii, plus simetricele lor, când se consideră a doua tangentă A T' la cercul O'.

2°. *Se cunoaşte* $A'H_a$. Se ştie că AH taie cercul O' în punctul D diametral opus lui A', prin urmare distanţa lui O' la A H este egală cu jumătate din lungimea dată $A'H_a$. Această observaţie conduce imediat la construcţia triunghiului. Pentru aceasta se construeşte un cerc cu centrul în O' şi cu raza egală cu jumătate din lungimea dată $A'H_a$. Apoi se duce tangenta A T' la acest cerc, tangentă care taie cercul O' (R') în D şi H_a. Se determină punctul A' la intersecţia lui D O' cu O' apoi se ia perpendiculara în A' pe $A'H_a$ o lungime A'O egală cu A D. Punctul O este centrul cercului ABC de rază 2R, care taie pe $A'H_a$ în B şi C. Restul urmează de la sine.

Sau, pentru a elimina ambiguitatea se complectează paralelogramul A'DAO, care dă un singur punct O, iar cu O A ca rază se descrie un cerc care determină pe B şi C.

Dacă în locul lui D pe figură se scrie H_a şi în locul lui H_a se scrie D, se obţine un alt punct O care nu dă totdeauna soluţie.

3°. *Se cunoaşte* $A'H_b$ sau $A'H_c$ ceiace este tot una. Triunghiul BH_bC fiind dreptunghic şi $A'H_b$ mediană, înseamnă că se cunoaşte latura BC, iar din triunghiul $CA'O$, dreptunghic în A', se deduce valoarea lui $A'O$ din formula

$$\overline{OA'}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{A'C}^2,$$

în care OC este cât diametrul cercului O'. Apoi din

$$\overline{A'O} = \overline{AD},$$

se deduce punctul D prin intersecţia lui O' cu cercul $A(OA')$. Va fi maximum 2 soluţii.

4°. *Se cunoaşte* $C'H_b$, ceiace este tot una. $C'H_b$ fiind mediană în triunghiul dreptunghic AH_bB este egală cu AC' de unde construcţia următoare: Se ia intersecţia C' a cercului O' cu cercul $A(C'H_b)$. După care se determină imediat H_c, B apoi E intersecţia lui O' cu $\perp$ în H_c pe AB şi în fine O, prin intersecţia $\perp$ în C' pe AB cu cercul $A(2R')$. Problema poate avea în acest caz cel mult 2 soluţii.

D-şoara *Victoria Abramescu* a rezolvat bine cazurile 1° şi 2°, fără însă a face discuţia.

D-l *Grigore A. Gh.* a rezolvat problema numai în cazul 2° fără a face discuţia.

Restul soluţiilor primite nu sunt acceptabile.

G-l Gh, B.

PROBLEME PROPUSE

2512. — Să se găsească patratul perfect de cinci cifre distincte, căruia suprimându-i ultima cifră ne dă un alt patrat, a cărui rădăcină patrată este un număr prim mai mic ca 60.

MIHAI GIURCONIU

1513. — Să se transforme expresia

$$E = \sqrt{3 + \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}$$

într'o sumă de două iraţionale de forma

$$\sqrt{x + \sqrt{z}} + \sqrt{y - \sqrt{z}}.$$

EUGEN VISA

1514. — Să se rezolve ecuaţia

$$|x^2 - 4| - 2|x^2 - 9| = 14 - x^2.$$

V. ALACI

2515. — Să se determine numărul întreg a, astfel încât ecuaţia

$$x^3 - (a+5)x - a = 0,$$

să aibă o rădăcină întreagă şi să se afle apoi rădăcinile ecuaţiei.

LT. COL EUGEN ŞT. IACOB

2516. — Să se studieze şi să se construiască curba

$$y = (a + \sqrt{r^2 - x^2})^3.$$

IOAN NEMEŢH

2517. — In triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, bisectoarea unghiului B taie perpendiculara dusă din C pe BC în punctul B_1, iar perpendiculara dusă din B pe BC taie bisectoarea unghiului C în C_1. Să se arate că,

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC} - \overline{AB}}{\overline{BC} + \overline{AB}}; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{CB_1}^2}{\overline{BC}^2 + \overline{CB_1}^2};$$

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{AC}^2(\overline{BC}^2 - \overline{CB_1}^2)}{\overline{AB}^2(\overline{BC}^2 - \overline{BC_1}^2)};$$

$$2\overline{CB_1} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC}(\overline{BC}^2 - \overline{CB_1}^2).$$

C. IONESCU-TIU

2518. — Se cere locul geometric al vârfului A al triunghiului ABC, care are baza BC fixă şi pentru care proecţia laturei AB pe BC este egală cu proecţia laturei BC pe AC.

G-L GH. BUICLIU

1519. — Să se stabilească identitatea

$$2^4 \sin\frac{\pi}{24} \sin\frac{5\pi}{24} \sin\frac{7\pi}{24} \sin\frac{11\pi}{24} = 1.$$

ILIE CONSTANTINESCU

2520 — In orice patrulater inscriptibil, avem relaţia

$$sp\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{2S + m \cdot n}},$$

unde α este unghiul format de diagonalele m, n.

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin număru lor de ordine

Boerescu P. G. (P); *Botez M.* (A); *Cârciu Ioan* (2490, 2491, 2496, 2497); *Chioreanu Ioan* (2496, 2497, 2498), *Constantinescu Ilie* (A; N; P.*Coţiu Aurel* (2375, 2427, 2429, 2430, 2490, 2499); *Deutsch Emeric* (1938, 2086, 2279, 2456, 2505); *Diea Rodica* (2435, 2473); *Fleşeriu Eugen* (2427, 2436, 2483, 2499, 2508); *Giurconiu Mihai* (P; 2473, 2477, 2483, 2487, 2490, 2492, 2493, 2494, 2496, 2497, 2499. 2502, 2503, 2508, 2509, 2510, 2511); *Ghertler Richard* (2362, 2435, 2438, 2456); *Gherlan V.* (N; P; 1827, 1840, 1876, 1877, 1883, 2018, 2086, 2191, 2193, 2221, 2233, 2276, 2277, 2279, 2448, 2334); *Ghitescu Virgil* (N.); *Hodar Moreno* (2492, 2508); *Manolescu G.* (2314, 2316, 2320, 2362, 2371, 2372, 2379, 2383, 2388, 2392, 2436, 2459, 2460, 2471, 2479, 2493, 2496, 2497. 2498, 2499); *Mărcuţiu Silviu* (P; 2490, 2496, 2497, 2498, 2499); *Musta Ştefan* (A.); *Neguţ Ioan* (P; 1637, 1697, 1842, 1858, 1922, 1923, 1971, 2028, 2071, 2118, 2233, 2257, 2281, 2282, 2420, 2429, 2448, 2458, 2466, 2472, 2485); *Nemeth Eugen* (2362, 2435, 2185); *Pali Sergiu* (2297, 2505 2506, 2509, 2511); *Stan Petru* (1272, 1275, 1582. 1588, 1687' 1737, 2118, 2418, 2430, 2438, 2451, 2452, 2453, 2456, 2459' 2461, 2462, 2469, 2471, 2475, 2497, 2493); *Szekeli G.* (2497); *Teleagă D-tru* (2497, 2498, 2499, 2501); *Turbuţiu Gh.* (2087, 2110, 2456, 2458, 2460, 2492, 2508); *Udrea Marin* (2458).

INFORMAŢIUNI

A APĂRUT:

67 EXAMENE DE ADMITERE
LA POLITEHNICELE DIN ROMÂNIA
de
GH. TH. GHEORGHIU.

Fascicola I:
Probleme de geometrie plană şi în spaţiu . . . . . 120.000 lei
Fascicola II:
Probleme de algebră . . . . 100 000 lei

Aceste preţuri nu sunt valabile decât o lună de zile. Doritorii se vor adresa: Prof. GH. TH. GHEORGHIU, str. Harry Truman, No 1, Timişoara. Se va adăoga la sumele de mai sus 10.000 lei pentru expediţie.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate n seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II–XXV, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 1200 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 30.000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Nu se primesc de la corespondenţi manuscrise iscălite sub pseudonim.

ANUL XXVII. IUNIE 1947 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREŢUL UNUI NUMAR 12000 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 120000 LEI PE AN.
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 240.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. INSTIINTARE.
2. **EUGEN VISA**: ASUPRA UNEI METODE PENTRU REZOLVAREA ECUATIILOR DE GRADUL AL PATRULEA.
3. ING. **GH. V. NICULESCU**: PROPRIETATI LA PATRULATER.
4. NOTE MATEMATICE 8, 9, 10.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 124, 140, 206, 1661, 2435, 2456, 2466, 2473.
7. PROBLEME PROPUSE: 2521 - 2528.
8. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul ori cărui nou abonament şi al oricărui volum este de 120.000 lei.

„R. M. T." aduce viile sale mulţumiri distinsului nostru colaborator Profesor EUGEN VIŞA pentru noua sa contribuţia benevolă de 200.000 lei.

Rugăm pe corespondenţii a ne trimete încă fiecare, suma de 30.000 (treizeci mii) lei, costul expediţiei revistei pe tot anul, deosebit de costul abonamentului.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Politehnica Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. Gh. Th Gheorghiu,** strada **Harry Truman,** No. 1, Timişoara I.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. GH. TH. GHEORGHIU, strada Harry Truman, No. 1, Timişoara I.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXVI, de 120000 (una sută douăzeci mii) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anii: I, XXIII şi XXV, epuizaţi. Anii: II—XXIV inclusiv, broşate, 120.000 lei fiecare, la care se adaogă cheltuielile de expediţie.

ANUL XXVII — No. 4. TIMISOARA, IUNIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 120.000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Harry Truman No. 1.

INȘTIINȚARE

1. *Incepând din Decemvrie 1939 și până la acest n-r al „R. M. T“, d-l Dr. Ing.* **Ștefan Nadașan,** *profesor de Rezistența Materialelor și Pro-Rector la Politehnica noastră, a avut greaua sarcina a,* **Administrației,** *„R. M. T.“. Rezistența D-sale fizică și sufletească, precum și dragostea de școală și tineret ce o cunoaștem, i-ar fi permis de sigur să continue. Din cauza însă a multiplelor activități ce desfășoară, din cauza lucrărilor D-sale originale ce le urmărește, dar mai ales din faptul că o parte a personalului de laborator care îl ajuta a plecat, s'a văzut nevoit să decline această însărcinare de la revistă.*

„R. M. T.“, regretând plecarea D-sale, îi mulțumește călduros pentru tot sprijinul dat până acum, în mod cu totul desinteresat, timp de aproape 8 ani și îl roagă să sprijine și pe mai departe revista, asigurându-i în Senatul Politehnicei din care face parte, fondurile necesare.

2. *Distinsul profesor al Politehnicei noastre, d-l* **Gh. Th. Gheorghiu,** *profesor de Geometrie Descriptivă, s'a oferit benevol să ia asupra D-sale greaua sarcină a „***Administrației** *R. M. T.“, începând chiar cu acest număr.*

Cunoscând dragostea D-sale de știință, în ogorul căreia a adus o contribuție remarcabilă, cunoscând entuziasmul și puterea D-sale de muncă, suntem siguri de o bună administrație a „R.M.T.“, ca și aceea de până acum, și îi aducem viile noastre mulțumiri.

REDACȚIA.

ASUPRA UNEI METODE PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIILOR DE GRADUL AL PATRULEA

DE

EUGEN VIȘA

Spre deosebire de metoda generală clasică a lui *Descartes* pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul al patrulea, aceste ecuații se mai pot rezolva prin diverse alte metode, de asemenea generale, intre care sunt de remarcat și două mai noui, una datorită anume D-lui Prof. *I. V. Matieș*, iar alta d-lui Prof. *V. Claudian**).

Vom da în cele de mai jos incă o metodă generală pentru rezolvarea numitelor ecuații, metodă destul de simplă de altfel și care, tocmai din această cauză, nu-i exclus să mai fi fost expusă undeva, ceeace, întru cât va fi cazul, socotim însă că nu face articolul de față cu totul inoportun sau lipsit de interes.

Fie deci ecuația de gradul al patrulea de formă generală:

$$\boxed{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0}. \tag{1}$$

Metoda de care vrem a ne ocupa, constă anume în determinarea coeficienților p, q, r și s, așa încât să avem indentitatea:

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D\equiv(x^2+px+q)^2-(rx+s)^2, \tag{2}$$

în virtutea căreia este clar atunci, că ecuația (1) se va descompune în următoarele ecuații de gra-

---

*) Pentru metoda lui *Descartes*, a se vedea de ex. manualul de *Algebră superioară pentru cl. VIII științifică* al regretatului Prof. *N. Abramescu*, ed. VII din 1941, iar pentru metodele D-lor Prof. *I. V. Mătieș* și *V. Claudian*, articolele D-lor publicate respectiv în *„Gazeta Matematică“*, Anul XLV, Nr. 11 din Iulie 1940 și revista *„Pozitiva“*, Anul III, Nr. 1—2 din Sept.—Oct. 1942.

dul al doilea:

$$(3)\qquad \boxed{x^2+(p+\varepsilon r)x+(q+\varepsilon s)=0}, \qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

Identificând cei doi membri din (2), deducem pentru p, q, r şi s următorul sistem auxiliar de ecuaţii:

$$(4)\qquad \begin{cases} 2p=A \\ p^2+2q-r^2=B \\ 2(pq-rs)=C \\ q^2-s^2=D. \end{cases}$$

Prima din ecuaţiile acestui sistem ne dă imediat:

$$(5)\qquad \boxed{p=\frac{A}{2}},$$

valoare de care ţinând seama, rezultă apoi că celelalte ecuaţii ale lui se vor putea scrie respectiv:

$$(6)\qquad \begin{cases} 4(2q-r^2)=4B-A^2 \\ Aq-2rs=C \\ q^2-s^2=D \end{cases}$$

şi astfel se vede că toată problema rezolvării ecuaţiei (1) revine de aici înainte la rezolvarea acestui nou sistem (6).

Observăm însă că sistemul (6) mai poate fi scris la rândul său şi sub forma:

$$(7)\qquad \begin{cases} r^2=\frac{1}{4}(8q+A^2-4B) \\ rs=\frac{1}{2}(Aq-C) \\ s^2=q^2-D \end{cases}$$

de unde, prin eliminarea necunoscutelor r şi s, deducem ecuaţia:

$$(8)\qquad [8q+(A^2-4B)](q^2-D)-(Aq-C)^2=0,$$

care, după efectuarea operaţiunilor respective şi reducerea termenilor asemenea, devine:

$$(9)\quad [8q^3-4Bq^2+2(AC-4D)q-[D(A^2-4B)+C^2]=0.$$

Această ecuaţie în q, care joacă, precum se vede, rolul de rezolvantă a ecuaţiei (1), prin substituţia

$$(10)\qquad q=\frac{z}{2},$$

poate fi adusă la forma ceva mai simplă:

$$(11)\qquad \boxed{z^3-Bz^2+(AC-4D)z-[D(A^2-4B)+C^2]=0}.$$

Notând atunci cu $z=z_0$ o rădăcină oarecare a ecuaţiei (11), relaţia (10) ne va da:

$$(12)\qquad \boxed{q=\frac{z_0}{2}=q_0}$$

valoare în virtutea căreia sistemul (7) se va scrie:

$$(13)\qquad \begin{cases} r^2=\frac{1}{4}(8q_0^2+A^2-4B) \\ rs=\frac{1}{2}(Aq_0-C) \\ s^2=q_0^2-D, \end{cases}$$

iar două oarecare din ecuaţiile lui, de pildă prima şi a treia, ne vor da:

$$(14)\qquad \boxed{\begin{array}{l} r=\pm\frac{1}{2}\sqrt{8q_0^2+A^2-4B}=r_0 \\ s=\pm\sqrt{q^2-D}=s_0 \end{array}},$$

semnele din faţa radicalilor neputând fi combinate însă decât evident aşa fel ca ecuaţia mijlocie să fie de asemenea verificată, adică aşa încât să avem:

$$(15)\qquad \boxed{r_0s_0=\frac{1}{2}(Aq_0-C)}.$$

Ţinând acum seama de valorile găsite sub (5), (12) şi (14) pentru coeficienţii p, q, r şi s, deducem imediat că ecuaţiile (3), înlocuitoare ale ecuaţiei (1), se vor scrie:

$$(16)\qquad x^2+\left(\frac{p}{2}+\varepsilon r_0\right)x+(q_0+\varepsilon s_0)=0,\ \varepsilon=\pm 1,$$

de unde, final, conchidem apoi că, rezolvând aceste din urmă ecuaţii, vom fi rezolvat în fond chiar ecuaţia (1).

Caz particular. Dacă între coeficienţii ecuaţiei (1) avem relaţia:

$$(17)\qquad \boxed{D(A^2-4B)+C^2=0},$$

atunci, precum se vede, o rădăcină a rezolvantei (11) este $z=0$. Urmează deci că, luând în acest caz şi $z_0=0$, fomulele (12) şi (14) ne vor da în ansamblul lor:

$$(18)\qquad \begin{cases} q_0=0 \\ r_0=\pm\frac{1}{2}\sqrt{A^2-4B} \\ s_0=\pm\sqrt{-D} \end{cases}$$

sub rezerva privitoare la combinaţia de semne, dedusă din relaţia (15), care în acest caz se scrie:

$$r_0 s_0 = -\frac{C}{2}. \tag{19}$$

Observaţii. Metoda expusă fiind generală, se poate evident aplica întocmai oricare ar fi ecuaţia (1).

Totuşi, cum principiul acestei metode pentru rezolvarea ecuaţiei (1) constă precum am văzut în rezolvarea sistemului (6), realizată de noi prin intermediul ecuaţiei rezolvante (11), este la fel de evident că, încercând rezolvarea sistemului (6) fără ajutorul acestei rezolvante, ceeace, în anumite cazuri particulare, poate fi chiar preferabil, acest principiu în sine rămâne acelaş.

Vom releva aici două asemenea cazuri, importante mai ales pentru că, dintr'un anumit punct de vedere, sînt analoage cazului particular relevat mai nainte.

1°. Să presupunem în acest caz prim, că între coeficienţii ecuaţiei (1) avem satisfăcută relaţia:

$$\boxed{A(A^2 - 4B) + 8C = 0}. \tag{20}$$

Iată atunci cum putem obţine foarte uşor o soluţie a sistemului (6). Eliminăm anume între primele două ecuaţii ale acestui sistem necunoscuta q, ceeace ne conduce la ecuaţia:

$$4r(Ar - 4s) = A(A^2 - 4B) + 8C \tag{21}$$

care în virtutea relaţiei (20), se simplifică şi devine:

$$4r(Ar - 4s) = 0. \tag{22}$$

Observăm însă că aceasta din urmă ecuaţie poate fi satisfăcută în particular dând lui r valoarea

$$r = 0 \tag{24}$$

de care, ţinând seama, sistemul (6) devine la rândul său:

$$\begin{cases} 8q = 4B - A^2 \\ Aq = C \\ q^2 - s^2 = D \end{cases} \tag{24}$$

şi de unde, în cele din urmă rezultă:

$$\begin{cases} q = \dfrac{C}{A} = \dfrac{1}{8}(4B - A^2) \\ q = \pm\sqrt{q^2 - D} = \pm\dfrac{\sqrt{C^2 - A^2 D}}{A} \\ \quad = \pm\dfrac{1}{8}\sqrt{(4B - A^2)^2 - 64D}, \end{cases} \tag{25}$$

sistemul (6) găsindu-se astfel foarte simplu rezolvat fără ajutorul rezolvantei (11).

2°. Presupunem acum în acest al doilea caz că, între coeficienţii ecuaţiei (1) există relaţia:

$$\boxed{C^2 - A^2 D = 0}. \tag{26}$$

Pentru aflarea unei soluţii a sistemului (6), vom elimina de astă dată tot pe q, dar între ultimele două ecuaţii ale lui.

Obţinem astfel ecuaţia:

$$s[(A^2 - C^2)s - 4Cr] = C^2 - A^2 D = 0,$$

care poate fi satisfăcută în particular pentru valoarea

$$s = 0. \tag{28}$$

Substituind această valoare a lui s în sistemul (6), deducem:

$$\begin{cases} 8q - 4r^2 = 4B - A^2 \\ Aq = C \\ q^2 = D \end{cases} \tag{29}$$

de unde avem apoi:

$$\begin{cases} q = \dfrac{C}{A} = \sqrt{D} \\ r = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{8q^2 + A^2 - 4B} = \pm\dfrac{\sqrt{A(A^2 - B) + 8C}}{2A} \\ \quad = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{8\sqrt{D} + A^2 - 4B} \end{cases} \tag{30}$$

şi astfel se vede modul în care am putut afla şi de astă dată o soluţie a sistemului (6) fără intermediul rezolvantei (11).

PROPRIETĂŢI LA PATRULATER

DE

Inginer GH. V. NICULESCU

Locot. C-dor în retragere.

Considerăm patrulaterul oarecare A B C D. Insemnăm cu M şi N mijloacele diagonalelor A C şi B D, cu E punctul de intretăiere al acestor diagonale, cu E_1 şi E_2 simetricele lui E în raport cu M şi N, apoi cu F mijlocul lui M N, cu G intersecţia dreptelor $E_1 N$ şi $E_2 M$ şi fie H mijlocul dreptei $E_1 E_2$. Numim bimediane dreptele ce unesc două câte două mijloacele laturilor opuse ale patru-

laterului. Se cunoaşte că aceste bimediane concură cu dreapta M N în mijlocul F al acesteia. Se cunoaşte deasemenea că G este centrul de greutate al patrulaterului, deoarece s'a luat $AE = E_1C$ şi $BE = E_2D$. Cum însă G este şi centrul de greutate al triunghiului EE_1E_2, dreapta E G este mediană în acest triunghiu, căci tot prin construcţie am luat: $EM = ME_1$ şi $EN = NE_2$. Ca mediană, E G taie atât pe E_1E_2 cât şi pe paralela sa M N în mijlocul H şi F ale acestora.

În concluzie punctele E, F, G şi H sunt colineare şi deci:

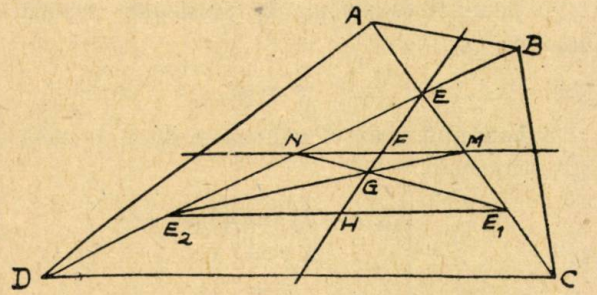


Fig. 1.

Intr'un patrulater oarecare intersecţia E *a diagonalelor, intersecţia* F *a bimedianelor* (punct comun cu mijlocul dreptei ce uneşte mijloacele diagonalelor) *centrul de greutate* G *al patrulaterului şi* H *mijlocul dreptei ce uneşte simetricele punctului* E *de întâlnire al diagonalelor în raport cu mijloacele acestora sunt patru puncte situate pe aceiaşi dreaptă.*

Urmârind figura, găsim:

$$EH = 3GH$$

apoi:

$$EF + FG = 2GH = 2(EF - FG) \therefore EF = 3FG.$$

Rezultă egalitatea:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{EH}{GH}$$

care se interpretează astfel:

Punctele E, F, G şi H *formează o diviziune armonică,* proprietate ce o datorez Domnului Prof. Universitar *Miron Niculescu*, fratele meu. Dacă patrulaterul este inscriptibil, cele 2 diagonale devin coarde în cerc şi perpendicularele ridicate în M şi N ştim că se'ntâlnesc în centrul O. Se observă cu uşurinţă că dacă diagonalele se'ntretaie sub un unghiu drept, atunci H se confundă cu O centrul cercului, iar dacă patrulaterul nu e inscriptibil ci numai cu diagonale ortogonale, atunci H este şi la mijlocul lui E_1E_2 (construcţia lui) dar şi la întretăierea perpendicularelor în M şi N respectiv pe diagonale. In urma acestor observaţii propoziţiunea de mai sus se particularizează astfel:

Intr'un patrulater inscriptibil cu diagonale ortogonale, punctul de întâlnire a diagonalelor, al bimedianelor, centrul de greutate al patrulaterului şi centrul cercului circumscris sunt patru puncte colineare, alcătuind o diviziune armonică.

In afară de cazul de mai sus, centrul O al cercului circumscris patrulaterului, se mai găseşte pe dreapta E F G într'un caz şi mai particular, acela al trapezului isoscel, dreapta de colinearitate fiind chiar bimediana bazelor, iar O este situat pe această dreaptă astfel, că oferă relaţia:

$$EF : FO = \overline{EM}^2 : \overline{MO}^2.$$

Găsim confundări de puncte: G (O) pentru un unghiu al diagonalelor $\varphi = 60^0$, apoi H (O) pentru $\varphi = 90^0$. Punctele sunt în ordinea E, F, G, H, O pentru $\varphi > 90^0$.

Un caz şi mai particular este al patrulaterului în care o diagonală, fie A C aceasta, taie pe cealaltă, B D, în părţi egale. In acest caz, dreapta de colinearitatea punctelor este chiar diagonala A C.

Să considerăm acum, un patrulater ABCD, care nu e *convex.*

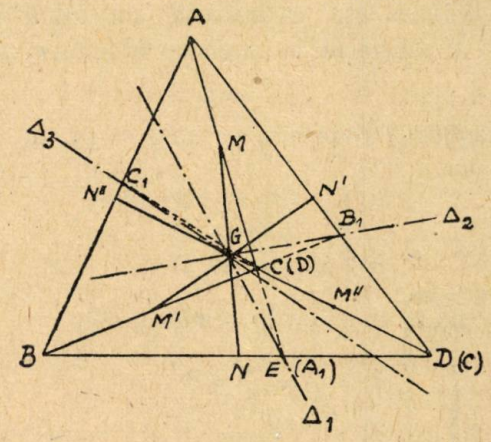


Fig. 2.

Construim cele două diagonale A C şi B D, luăm mijloacele M, N şi le unim şi de-asemenea

bimedianele. Proprietatea ca aceste 3 drepte să concure în mijlocul lui M N se menţine, dar şi mai mult şi aceia de a se tăia în părţi egale. Aceste 3 drepte concurente sunt trasate pe figură mai gros. Să considerăm triunghiul A B D şi să facem abstracţie de patrulaterul convex. In el ducem 3 ceviene concurente în C. Punctele M, M′, M″ sunt mijloacele distanţelor dela vârfurile triunghiului considerat (A B D) la punctul de concurenţă C iar N, N′ şi N″ sunt mijloacele laturilor triunghiului. Astfel că proprietatea de concurenţă dela patrulater a celor 2 bimediane şi a dreptei ce uneşte mijloacele diagonalei se transformă la triunghi în *proprietatea cunoscută:*

„Într'un triunghiu cu 3 drepte concurente în C, *dreapta ce uneşte mijlocul distanţei dela vârf la punctul de concurenţă cu mijlocul laturei respective a triunghiului şi celelalte 2 drepte similare, sunt* 3 *drepte concurente, ce se taie între ele în părţi egale.*

Dreapta de *colinearitate,* dela patrulaterul convex nu are însă o traducere reuşită la cel neconvex şi deci la triunghi. Totuşi oferă o proprietate ce-o credem nouă. Intr'adevăr, dacă ne referim şi la patrulaterele, deasemenea neconvexe, A B D C şi A D B C, dreptele respective de *colinearitate* sunt obligate a trece tot prin F, din cauza proprietăţii de mai sus, astfel, că trecând la notaţiunile referitoare la triunghi, putem enunţa proprietatea:

Într'un triunghiu oarecare A B C *în care s'au luat trei ceviene concurente în* D, *dreapta ce uneşte piciorul* A_1 *al cevienii cu centrul de greutate* G_1 *al patrulaterului neconvex* A B D C *şi dreptele similare* $B_1 G_2$ *şi* $C_1 G_3$ *sunt 3 drepte* Δ *concurente în* F *astfel că avem:*

$$\frac{A_1 F}{F G_1} = \frac{B_1 F}{F G_2} = \frac{C_1 F}{F G_3} = 3.$$

Terminăm aceste câte-va elementare contribuţii atrăgând atenţia că ele îşi mai pot mări importanţa dacă se va ţine seamă de alte multe interesante teoreme din Exerciţii de geometrie de F. G. M, teoreme în care unul sau mai multe din punctele E, F, G şi O joacă şi alte roluri de seamă şi mai ales în patrulaterul inscriptibil şi în cel armonic. Sau încă, punând noui probleme direct asupra figura figurii, una din acestea ar fi studiul celor 2 suprafeţe în care este împărţit patrulaterul prin dreapta E G.

NOTE MATEMATICE

8. — *Analyse multigrade.*

Sur le système diophantien

$$A_1^n + A_2^n + 2A_3^n = B_1^n + B_2^n + 2B_3^n, \quad (n = 2,4).$$

1) On a l'identité

$$[3ac+bd)(ac-bd)]^n + [(3ac-bd)(ac+bd)]^n + 2(3a^2b^2 + c^2d^2)^n =$$
$$[(3ab+cd)(ab-cd)]^n + [(3ab-cd)(ab+cd)]^n + 2(3a^2c^2 + b^2d^2)^n, \quad (n = 2,4).$$

Exemples numériques.

$$a = 1, \ b = 1, \ c = 2, \ d = 1$$

$7^n + 15^n + 2 \cdot 7^n = 5^n + 3^n + 2 \cdot 13^n$, $(n = 2,4)$ ou

$15^n + 3 \cdot 7^n = 5^n + 3^n + 2 \cdot 13^n$, $(n = 2,4)$.

$$a = 3, \ b = 1, \ c = 2, \ d = 1$$

$95^n + 119^n + 2 \cdot 31^n = 11^n + 35^n + 2 \cdot 109^n$, $(n = 2,4)$.

2. Autre identité.

On a

$$[3(a+c-2d)(2c^2+d^2-2a^2-b^2)]^n +$$
$$[3(a+2b+c)(2c^2+d^2-2a^2-b^2) - 4(2c^3+d^3-2a^3-b^3)]^n +$$
$$2[3(3a+c)(2c^2+d^2-2a^2-b^2, -4(2c^3+d^3-2a^3-b^3)]^n =$$
$$[3(a+c-2b)(2c^2+d^2-2a^2-b^2)]^n +$$
$$[3(a+c+2d)(2c^2+d^2-2a^2-b^2) - 4(2c^3+d^3-2a^3-b^3)]^n +$$
$$2[3(a+3c)(2c^2+d^2-2a^2-b^2) - 4(2c^3+d^3-2a^3-b^3)]^n, (n=2,4)$$

les paramètres a, b, c, d vérifiant la relation linéaire

$$2a + b = 2c + d.$$

Exemple numérique,

$a = 1, \ b = 7, \ c = 2, \ d = 2$

$17^n + 63^n + 2 \cdot 91^n = 19^n + 99^n + 2 \cdot 73$, $(n = 2,4)$

A. GLODEN

---

9. — *O generalizare în legătură cu raportul armonic.*

Fie r raportul anarmonic a patru puncte A, B, C, D pe o dreaptă Δ, anume

$$r = (A B C D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Dacă raportul este armonic ($r=-1$), avem

$$(A\,B\,C\,D)=(A\,B\,D\,C).$$

Să considerăm atunci pe aceiaşi dreaptă şi punctul B' definit de

$$r=(A\,B'\,D\,C)=\frac{\overline{DA}}{\overline{DB'}}:\frac{\overline{CA}}{\overline{CB'}}.$$

Rezultă din definiţie

$$(1)\qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}:\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'D}}=\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2.$$

Luând o origine arbitrară O pe dreaptă şi notând cu litere mici corespunzătoare, abscisele punctelor, putem scrie

$$(c-a)^2(c-b)(c-b')=(d-a)^2(d-b)(d-b')$$

sau

$$(2)\quad a^2(b+b'-d-c)+bb'(c+d-2a)=cd(b+b'-2a),$$

sau încă

$$(3)\quad (a-b')(ab+cd)+(a-b)(ab'+cd)=(c+d)(a^2-bb')$$

Dacă luăm originea în A, relaţia (3) devine

$$(4)\qquad \frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AB'}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}.$$

Un cerc tangent în A la dreapta Δ taie un cerc arbitrar care trece prin B şi B' după o dreaptă care intersectează pe Δ în L. Luând originea în L (pentru care $a^2=bb'$), relaţia (3) se reduce la

$$(a^2-cd)(b+b'-2a)=0$$

şi cum media aritmetică este diferită de media geometrică ($b\neq b'$), al doilea factor este diferit de zero; rezultă

$$(5)\qquad \overline{LA}^2=\overline{LB}.\overline{LB'}=\overline{LC}.\overline{LD}.$$

Dacă J este mijlocul segmentului $\overline{CD}$, avem

$$\overline{LA}^2=\overline{LC}.\overline{LD}=(\overline{LJ}-\overline{CJ})(\overline{LJ}+\overline{CJ})=\overline{LJ}^2-\overline{CJ}^2;$$

$$(6)\qquad \overline{LJ}^2=\overline{LA}^2+\overline{CJ}^2$$

Observare. 1° In cazul raportului armonic (B=B'), relaţiile (3), (4) se reduc la formele cunoscute

$$2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$$

$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}},$$

iar (5), (6) îşi păstrează forma, observând că L este mijlocul segmentului AB.

2°. Fie I, I', J, K respectiv mijloacele segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{AB'}$, $\overline{CD}$, $\overline{BB'}$ şi O arbitrar pe Δ; relaţia (2) devine

$$(7)\qquad \overline{OA}^2.\overline{KJ}+\overline{OB}.\overline{OB'}.\overline{JA}=\overline{OC}.\overline{OD}.\overline{KA}$$

3°. Menţionăm şi următoarele relaţii secundare

$$(8)\qquad \frac{2}{\overline{AK}}-\frac{1}{\overline{CK}}-\frac{1}{\overline{DK}}=\frac{\overline{BK}^2}{\overline{AK}^2}.\frac{2\overline{AK'}-\overline{CK}-\overline{DK}}{\overline{CK}.\overline{DK}}$$

$$(9)\qquad \overline{AB'}(\overline{JA}.\overline{JB}-\overline{JC}^2)+\overline{AB}(\overline{JA}.\overline{JB'}-\overline{JC}^2)=0$$

$$(10)\qquad \frac{\overline{ID}.\overline{IC}}{\overline{IA}}-\frac{\overline{I'D}.\overline{I'C}}{\overline{I'A}}=\overline{II'}$$

$$(11)\qquad \overline{LA}.\overline{LB'}.\overline{AB}=\overline{LC}.\overline{LD}.\overline{AB'}$$

$$(12)\qquad \frac{\overline{LB'}}{\overline{LB}}=\left(\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}\right)^2.$$

N. N. MIHAILEANU

10. — *O observare.* D-l *N. N. Mihăileanu* relevă, cu privire la articolul din n-rul precedent al „R. M. T.", de la pag. 29, că relaţia (1') de acolo, mai reprezintă cubice şi în cazul $k=\frac{1}{3}$, ceeace este just.

V. A.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, No. 9, Mai 1947. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din 1947, de *Gh. D. Simionescu*. Poziţii de echilibru relativ în problema atracţiei Newtoniene a două puncte materiale, de Ing. *M. Pătroianu*. Raport pentru premiul de Algebră „*A. G. Ioachimescu*", de Ing. *I. S. Antoniu* şi *G-l Gh. Buicliu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse. Conţine şi un supliment cu: Darea de seamă asupra reuniunii care a încheiat al 37-lea concurs al „Gazetei Matemate", de *Alexandru Stoenescu*.

2. *Gh. Th. Gheorghiu:* 67 de examene de admitere la Politehnicele din România. Fascicola II, tipărită, ediţia II-a, 1947. Este o lucrare valoroasă şi folositoare, de aceea o recomandăm călduros corespondenţilor noştri.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 124[1]. *Să se stabilească identitatea*

$$(x\,y-z)(y\,z-x)(z\,x-y)-\Sigma\,x\,y\,(z-1)^2(x\,y-z)=-2\,x\,y\,z\,(x-1)(y-1)\,z-1).$$

V. ALACI

[1]) Enunţ corectat.

Soluție. Pentru $x=0$, primul membru notat cu E, devine

$$E = y^2 z^2 - y^2 z^2 = 0,$$

ceia ce dovedește că primul membru al identității admite factorul x. Analog arătăm că y și z sunt factori ai primului membru.

Apoi, pentru $x=1$, primul membru al identității, se poate scrie succesiv,

$$\begin{aligned} E &= (y-z)(yz-1)(z-y) - y(z-1)^2(y-z) - z(y-1)^2(z-y) \\ &= (y-z)[(yz-1)(z-y) - y(z^2-2z+1) + z(y^2-2y+1)] \\ &= (y-z)(yz^2 - z - y^2 z + y - yz^2 + 2yz - y + zy^2 - 2yz + z). \end{aligned}$$

Simplificând al 2-lea factor, găsim zero, deci $E=0$, ceeace dovedește că primul membru al identității admite factorul $x-1$; analog dovedim că el admite și factorii $y-1$, $z-1$.

Rezultă că E se divide prin produsul

$$x\,y\,z\,(x-1)(y-1)(z-1),$$

care având același grad ca și E, câtul lor nu poate fi de cât o constantă. Avem astfel identitatea

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(x\,y-z)(y\,z-x)(z\,x-y) - \\ &\Sigma\, xy(z-1)^2(xy-z) = k\,.\,xyz\,(x-1)(y-1)(z-1) \end{aligned}$$

Rămâne să determinăm constanta k.

Identitatea (1) având loc pentru orice valoare a variabilelor x, y, z, în particular pentru $x=y=z$, obținem

$$(z^2-z)^3 - 3z^2(z-1)^2(z^2-z) = k\,z^3(z-1)^3,$$

sau

$$z^3(z-1)^3 - 3z^3(z-1)^3 = k\,z^3(z-1)^3.$$

De aci rezultă $k=-2$, valoare care introdusă în (1) ne dă identitatea cerută.

D-l *A. Podariu*, a corectat enunțul și a dat o altă soluție, arătând că desvoltând calculele în ambii membrii ai identității, se obține același rezultat, anume

$$-2\,x\,y\,z\,(x\,y\,z - x\,y - y\,z - z\,x + x + y + z - 1).$$

Problema 140. — *Să se indice operațiile ce trebuesc făcute, pentru a construi expresia*

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a\,b}{c}},$$

și să se indice valoarea ei, geometric aflată, pentru $a=7{,}2$; $b=5{,}4$; $c=1{,}2$.

GH. M. VASILIU

Soluția. Punem

$$y = \frac{a\,b}{c},\quad z^2 = y,\quad w^2 = b^2 + z^2,\quad x^2 = a^2 + w^2.$$

Pentru a construi pe x va trebui să construim mai întâiu succesiv pe: y, z, w. Iată pe rând construcțiile ce trebuesc făcute.

1. Prima egalitate scrisă sub forma $\frac{y}{b} = \frac{a}{c}$ ne spune că y este a 4-a proporțională între segmentele a, b, c. Pentru a-i face construcția geometrică, luăm pe una din laturile unui unghiu oarecare $OA=a$, $OC=c$, iar pe ceialaltă $OB=b$. Paralela dusă prin A la BC taie latura opusă în D. Asemănarea triunghiurilor OCB și OAD ne spune că $OD=y$.

2. Scriind: $z^2 = y\,.\,1$, rezultă că z este medie proporțională între y și 1. Pentru a-l construi, luăm pe prelungirea lui OD, $OF=1$; iar pe FD ca diametru construim un semicerc. Perpendiculara în O pe FD taie acest semicerc în E. Segmentul OE este z deoarece triunghiul FED este dreptunghic și știm că într'un astfel de triunghiu înălțimea unghiului drept este medie proporțională între segmentele determinate de piciorul ei pe bază.

3. $EB=w$ deoarece este ipotenuză într'un triunghiu dreptunghic ale cărui catete sunt $OB=b$ și $OE=z$.

4. Ridicând în E o perpendiculară pe BE și luând pe ea $EH=a$, aceiași proprietate ca la n-rul precedent ne spune că

$$BH = H.$$

Lăsăm construcția cu datele problemei din enunț, pe seama cititorului. Se găsește că $x=10{,}6$.

Soluție dată de D-nii: *Atanasiu D-tru* (Huși), *Brădeteanu C. Cornel* (Craiova), *Berdan C.* (Bârlad), *Dragomirescu-Buzne Ed.* (Timișoara), *Focșeneanu I. M.* (Târgoviște), *Georgescu-Val N. I.* (Șc. Of. de Art Timișoara), *Gheorghiu Th. Gh.* (Galați), *Miclescu Andrei* (Timișoara), *Neștianu Gh. Gh.* (Târgoviște), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Th. Ion*, *Râuț Const.* (Târgoviște), *Silion Gh. Ion*, *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Tărăbuță C. Paul* (București) și *Theodoru St. Nicuță* (Huși).

Gh. Th. Gh.

Problema 206. — *Să se construiască, arătându-se calculele și construcțiile grafice în ordinea lor succesivă, două segmente, astfel încât logaritmul raportului lor să fie egal cu*

$$\frac{\log 2 - \log 5 + \log(5-\sqrt{5})}{2}.$$

D. G. PANTAZI

Soluția. Fie a și b cele două segmente. Avem succesiv

$$\log\frac{a}{b} = \log\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}} \therefore \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,R}{\frac{1}{2}\sqrt{5}\,R}$$

unde R este o lungime arbitrară. Numărătorul reprezintă latura pentagonului regulat convex l_5 înscris în cercul de rază R, și a cărei construcție clasică este următoarea: se consideră în cerc diametrele AB și CD perpendiculare; din mijlocul E al lui OD și cu o rază cât EA se descrie un arc de cerc care taie pe OC în F; avem $AF = l_5$. Din triunghiul OAE scoatem

$$AE = \sqrt{OA^2+OE^2} = \sqrt{R^2+\frac{1}{4}R^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,R$$

Deci

$$\frac{a}{b} = \frac{AF}{AE}.$$

Cum raza R este arbitrară, putem lua $a = AF$, $b = AE$. Problema admite o infinitate de perechi de soluții.

Soluții date de d-nii: *Atanasiu I. D-tru, Dumitrescu Pantelimon, Negretzu Florea, Mehlmann Theodor, Popovici C. C-tin, Silion Gh. Ion, Tărăbuță C. Paul* și *White Gheorghe.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1661. — *Prin vârful* A *al triunghiului* ABC, *se duc două cercuri tangente, unul în* B, *altul în* C, *la latura* BC. *Fie* I *intersecția celor două cercuri și* B′, C′ *punctele unde dreptele* BI *și* CI *taie respectiv laturile* AC *și* AB. *Să se demonstreze că:* 1° *Patrulaterul* AB′IC′ *este inscriptibil.* 2° *Cercul* AB′IC′ *este tangent în* A *la cercul* ABC. 3° *Dreapta* AI *este mediana triunghiului* AB′C′.

LOCOT. I. GH. ZAMFIRESCU

Soluție dată de D-l Prof. *Hr. Dăscălescu* (Focșani).

1° Avem

$$\widehat{ICB} = \widehat{IAC} = \frac{1}{2}\text{arc CI}, \widehat{IBC} = \widehat{IAB} = \frac{1}{2}\text{arc BI}$$

relații care adunate dau:

$$\widehat{ICB} + \widehat{IBC} = \widehat{IAC} + \widehat{IAB} = \widehat{BAC}.$$

Dar:

$$\widehat{CIB} = \widehat{B'IC'}$$

ca opuse la vârf, încât

$$\widehat{BAC} + \widehat{B'IC'} = 180^0$$

ca suma unghiurilor triunghiului BCI. Având două unghiuri opuse suplementare, patrulaterul AB′IC′ este inscriptibil.

2° Din rezultatul precedent, rezultă:

$$\widehat{B'AI} = \widehat{B'C'I} = \widehat{ICB};$$

dreptele B′C′, BC făcând unghiuri alterne interne egale, cu secanta CC′, sunt paralele și deci: $\widehat{AB'C'} = \widehat{ACB}$, adică arcele AC′ și AB sunt egale ca număr de grade și dreapta AB va face cu tangentele în A la cercurile ABIC′ și ABC același unghiu. Cele două tangente trebuesc să se confunde și deci cercurile sunt tangente în A.

3° Dreapta AI este axul radical al cercurilor date. Dacă T este punctul unde AI taie pe BC, cum TB și TC sunt tangente la cele două cercuri și T se găsește pe axul radical al lor, TB = TC. Această egalitate spune că AT este mediană în triunghiul ABC și deci și în triunghiul AB′C′ deoarece BC este paralelă cu B′C′.

Alte soluții date de d-nii: *Areșteanu O. Hero* (București), *Cristea I. Nic.* (Blaj), *Popa D. Mircea* (Iași), *Rohr I. Alex.* (Iași), *Segal Zigu* (Vaslui) și *Șerban C. Const.* (Târgoviște).

Gh. Th. Gh.

Problema 2435. — *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt{x+\sqrt{(2x+a-2)(2-a)}} + \sqrt{x-(2x+a-2)(2-a)} = \sqrt{2a}$$

și apoi să se verifice.

C. IONESCU-TIU

Prima soluție. Ridicăm la patrat ecuația dată și avem

$$x+\sqrt{(2x+a-2)(2-a)} + x - \sqrt{(2x+a-2)(2-a)} + 2\sqrt{x^2-(2x+a-2)(2-a)} = 2a.$$

Simplificând obţinem

(1) $\sqrt{x^2-(2x+a-2)(2-a)}=a-x.$

Dar,

$$x^2-(2x+a-2)(2-a)=x^2-4x(2-a)+(2-a)^2=$$
$$=[x-(2-a)]^2,$$

astfel că (1) devine

$$x+a-2=a-x,$$

de unde deducem $x=1$, rădăcina ecuaţiei date.

Verificare. Pentru $x=1$, ecuaţia dată devine

$$\sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}}+\sqrt{1-\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{2a}.$$

Ridicând la patrat obţinem

$$2+2\sqrt{1-2a+a^2}=2a,$$

sau

$$1+a-1=a.$$

Ecuaţia dată este verificată pentru $x=1$.

Soluţii date de d-nii: *Agapi Valeriu, Almăşan Lazăr, Bălăuţă Mihai* (Lic, Deva), *Beşchea Radu* (P. B), *Blaga Ovidiu* (Lic. Cluj), *Bogza Mihai* (P. B), *Bonea Anton* (Brăila), *Chioreanu I.* (Cluj),, *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Paul* (Colegiul Milit. N. Filipescu), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Crăcea D-tru* (Liceul Slatina). *Crăciunescu Victor, Dănescu Alexandru, Dăscălescu Mihai, Deutsch Emeric* (P. T.), *Diaconu Vasile* (Colegiul Milit,, N Filipescu), *Dobrişan Alexandru* (P., T.), *Gherlan Vasile* (Lic. Beiuş), *Ghersch Paul, Giurconiu Mihai* (P.. T.), *Guttman Tiberiu* (P., T.), *Haret Radu* (Bucureşti), *Hurezeanu Romulus, Lebovics Ervin* (P., T.), *Măncescu Ion* (Colegiul Milit. N. Filipescu), *Mărcuţiu Silviu* (P. T,), *Marinescu D.* (Lic. Ploeşti), *Moldovan Mircea* (P., T.), *Manolescu Gh.* (P., T.), *Munteanu Giuseppi, Munteanu Ioan* (Colegiul Milit. N. Filipescu), *Nedelcu Ulpius* (Şc. Of. de Geniu, Bucureşti), *Neguţ Ion* (Tg.-Jiu), *Pantea Alexandru Păişanu Ilie, Pişanca Ionel* (Colegiul Loga Timişoara), *Poenaru Gh.* (P., T.), *Popa Vasile* (P., T.), *Popescu Alexandru, Puşcaşiu Silviu* (P., T.), *Ristea Gh.* (Lic. M. Basarab, Bucureşti), *Roman C-tin* (P,, T.), *Săsărlan Mihai* (Liceul Cluj), *Simionescu Gh.* (Lic. Roman), *Stan Petru* (P., T.) *Stănilă Gh.* (Lic Buzău), *Tarcea Ion* (P., T.), *Teiuşan Horia* (P., T.), *Tincu C-tin* (P., T.), *Trica Marcu* (P., T. şi *Turbuţlu Gh.* (Lic. Cluj).

Soluţia 2-a. Ştim că o expresie de forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, se descompune într'o sumă de doi radicali simpli, anume

$$(1)\qquad \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

numai dacă A^2-B este un patrat perfect, C^2.

Ori, în cazul ecuaţiei noastre,

$$A^2-B=x^2-(2x+a-2)(2-a)=$$
$$x^2-2x(2-a)+(2-a)^2=(x-2+a)^2=C^2.$$

Astfel, conform relaţiei (1) ecuaţia dată devine

$$\sqrt{\frac{x+x+a-2}{2}}+\sqrt{\frac{x-x-a+2}{2}}+$$
$$\sqrt{\frac{x+x+a-2}{2}}-\sqrt{\frac{x-x-a+2}{2}}=\sqrt{2a},$$

sau

$$(2)\qquad 2\sqrt{\frac{2x+a-2}{2}}=\sqrt{2a}.$$

Ridicând la patrat şi simplificând, obţinem

$$2x+a-2=a,\quad \text{deci } x=1.$$

Verificare. Ecuaţia dată, sau ecuaţia echivalentă, pentru $x=1$, devine

$$2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a},$$

rezultat evident.

Soluţie dată de d-nii: *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Marinescu D.* (Lic. Ploeşti), *Novac Ioan* (P., T.) şi *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Problema 2456. — *Să se găsească un număr de două cifre, astfel că scriind după el împătritul său şi apoi cifra 4, să căpătăm un patrat perfect de cinci cifre.*

PETRE TEODORESCU

Soluţie. Fie ab numărul cerut de două cifre. Atunci, patratul N^2 de cinci cifre este de forma

$$N^2=a.b(4ab)4=10000a+1000b+400a+40b+4,$$

sau

$$N^2-4=10400a+1040b=1040(10a+b)=104.ab.10$$

$$(1)\quad (N-2)(N+2)=2^3.13.ab.2.5=2^4.5.13.ab.$$

Factorul prin 13, trebuie să dividă unul din factorii primului membru, deci

$$N-2=13k,\ \text{sau}\ N+2=13k,$$

şi atunci (1) devine

$$13k(13k\pm 2)=2^4.5.13ab,$$

sau

$$(2)\qquad k(13k\pm 4)=2^4.5.ab$$

Membru al 2-lea fiind par, trebuie să avem $k=2k_1$ şi (2) simplificat cu 4, devine

$$(3)\qquad k_1(13k_1\pm 2)=2^2.5.ab.$$

Trebuie încă să avem $k_1=2k_2$, deci (3) devine

(4) $$k_2(13k_2 \pm 1) = 5 . ab.$$

Factorul prin 5, trebuie să dividă unul din factorii primului membru.

Pentru $k_2 = 1$, primul membru din (4) nu se divide prin 5.

Pentru $k_2 = 2$, (4) devine

$$2 . (26 \pm 1) = 5 . ab$$

şi dacă luăm semnul —, rezultă

$$ab = 10$$

soluţie acceptabilă.

Pentru $k_2 = 3$, (4) devine

$$3(39 \pm 1) = 5 . ab$$

şi dacă luăm semnul +, rezultă

$$ab = 24,$$

soluţie acceptabilă.

Cum $4ab$ trebuie să fie de două cifre, rezultă $10 \leqq ab \leqq 24$ şi deci, în (4), nu putem da alte valori lui k_2.

Numărul de două cifre cerut este 10, sau 24. Evident că

$$10404 = 102^2, \quad 24964 = 158^2.$$

Soluţii diferite date de d-nii: *Adomnichi Vasile* (Lic. Armatel, Timişoara), *Bălă C-tin* (Lic. Tg.-Jiu), *Baranga Mihai* (Lic. Armatei T.), *Baz Marcel* (Lic. Armatei Tim.), *Boerescu P. G.* (a dat o soluţie asemănătoare celei de mai sus), *Cârciu Ioan* (Colegiul Loga, T.), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Cocoş Gh.* (Lic. Armatei, T.), *Coman Liviu* (P, T.), *Comşa Corneliu* (Lic. Armatei, T.), *Constantinescu Gh.* (Lic. Ar. T.), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina, *Corduneanu C-tin* (Colegiul N. Filipescu). *Crăciun Silviu* (Lic. Ar. T), *Cucu Emil* (Lic. Ar. T.), *Diaconescu Ioan* (Lic. Ar. T.), *Dobrin Aurel* (Lic. Ar. T.), *Dumitrescu Adrian* (Lic. Ar. T), *Făgărăşeanu Ioan* (Lic. Ar. T.), *Fleşeriu Eugen* (P., T.), *Gâlca Horaţiu* (Lic. Ar. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gherlan V.* (Lic. Beiuş), *Hurezeanu Romulus* (Lic. Tg.-Jiu), *Ionescu Corneliu* (Lic. Arm. T.), *Janca Spiridon* (Lic. Ar. T.), *Man Aurel* (Lic. Ar. T.), *Mâncescu Ion* (Col. N Filipescu), *Manolescu Gh.* (P., T.), *Marinescu D.* (Ploeşti), *Moldovan Mircea* (P., T.), *Munteanu Giuseppi* (Lic. Braşov), *Negru Savu* (Lic. Ar. T.), *Neguţ Ion* (Lic. Tg.-Jiu), *Nemeth Eugen* (Lic. Braşov), *Novac Ion* (P., T.), *Pârvu Ioan* (Lic. Ar. T.), *Pavel N.* (Lic. Ar. T.), *Pisanca Ionel* (Colegiul Loga, T.), *Puşcaşiu Silviu* (P., T.), *Rădulescu Valeriu* (Lic. Ar. T.), *Răuţu Titus* (Lic. Ar. T.), *Ristea Gh.* (Lic. Matei Basarab Bucureşti), *Scurtu Gh.* (Lic. Ar. T.), *Simionescu Gh.* (Lic. Roman), *Stanciu Petre* (Lic. Ar. T.), *Stancu N.* (Lic. Ar. T.), *Ştefan Ilie* (Lic. Ar T.), *Ştefănescu Sofronie* (Liceul Ar. T.), *Szekely G.* (Cluj), *Taroia Alexandru* (Lic. Ar. T.), *Tătaru Sever* (Lic. Ar. T.), *Tincu C-tin* (P., T.), *Trache D.* (Lic. Ar. T.), *Turbuţiu Gh.* (Lic. Cluj), *Udrea Manoil* (Lic. Ar. T.) şi *Voinea Stelian* (Lic. Ar. T.),

---

Problema 2458. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$a^2x^4 - a(a+b)x^3 - abx^2 + b(a+b)x + b^2 = 0.$$

IOAN FILIMON

Soluţie. Impărţind cu x^2 şi grupând convenabil avem

$$(1) \quad a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} - (a+b)\left(ax - \frac{b}{x}\right) - ab = 0.$$

Făcând substituţia

$$(2) \quad ax - \frac{b}{x} = y,$$

rezultă

$$a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} = y^2 + 2ab$$

şi atunci ecuaţia (1) devine

$$y^2 - (a+b)y + ab = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt evident

$$y_1 = a, \quad y_2 = b.$$

Inlocuind în (2) aceste valori, în locul lui y, obţinem

$$ax - \frac{b}{x} = a \quad \text{şi} \quad ax - \frac{b}{x} = b,$$

sau

$$(2) \quad ax^2 - ax - b = 0$$

$$(3) \quad ax^2 - bx - b = 0.$$

De aci deducem, prin rezolvare

$$(1') \quad \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a(a+4b)}}{2a} \\ x_{3,4} = \dfrac{b \pm \sqrt{b(b+4a)}}{2b}. \end{cases}$$

Relaţiile (1') ne dau rădăcinele ecuaţiei date.

Soluţii bune date d-nii: *Adomnichi Vasile* (Lic. Arm. Timişoara), *Balanişcu Chirică* (student, Cluj), *Baranga Mihai* (Lic. Ar. T.), *Baz Marcel* (L. Ar. T.), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Cocoş Gh.* (Lic. Ar. T.), *Comşa Corneliu* (Lic. Ar. T.), *Constantinescu Gh.* (Lic. Ar. T.), *Constantinescu Paul* (Colegiul N. Filipescu), *Diaconu Vasile* (Colegiul N. Filipescu), *Dumitrescu Adrian* (Lic. Ar. T.), *Făgărăşeanu Ioan* (Lic. Ar. T.), *Florea Vasile* (Lic. Ar. T.), *Gâlea Horaţiu* (Lic. Ar. T.), *Gheorghian Leonid* (Lic. Ar. T.), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Ioncu Simion* (student), *Ionescu Corneliu* (Lic. Ar. T.), *Janca Spiridon* (Lic. Ar. T.), *Man Aurel* (Lic. Ar. T.), *Mâncescu Ion* (Colegiul N. Filipescu), *Manta Nicolae* (Lic. Ar. T.), *Mărcuţiu Silviu* (Cluj), *Marinescu D.* (Ploeşti), *Munteanu Ioan* (Lic. Ar. T.), *Novac Ioan* (P., T.), *Pali Scrgiu* (P., T.), *Pârvu Ioan* (Lic. Ar. T.), *Pavel Nicolae* (Lic. Ar. T.), *Poenaru Gh.* (P., T.), *Popescu Barbu* (P., T.), *Rădulescu Valeriu* (Lic. Ar. T.), *Răuţu Titus* (Lic. Ar. T.), *Ristea Gh.* (Lic. Matei

Basarab, Bucureşti), *Scurtu Gh.* (Lic. Ar. T.), *Stancu Nicolae* (Lic. Ar. T.), *Ştefan Ilie* (Lic. Ar. T.), *Ştefănescu Sofronie* (Lic. Ar. T.), *Tarola Alexandru* (Lic. Ar. T.), *Tatomir Ioan* (Lic. Ar. T.), *Teiuşan Horia* (P., T.), *Teodorescu Petre* (Lic. M. Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P., T.), *Târcomnicu C-tin* (Lic. Slatina), *Udrea Marin* (Lic. Ar. T.) şi *Voinea Stelian* (Lic. Ar. T.).

Problema 2466. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{i\,x^5}{2+x^5}-\operatorname{arc\,tg}\,i\,\frac{x^5-x^4+1}{x^5+x^4+1}=0,$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

MIHAI GIURCONIU

Soluţie. Putem scrie

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{i\,x^5}{2+x^5}=\operatorname{arc\,tg}\,i\,\frac{x^5-x^4+1}{x^5+x^4+1},$$

de unde deducem

$$\frac{x^5}{2+x^5}=\frac{x^5-x^4+1}{x^5+x^4+1},$$

sau

$$x^{10}+x^9+x^5=2x^5-2x^4+2+x^{10}-x^9+x^5.$$

Simplificând, obţinem

$$2x^9-2x^5+2x^4-2=0$$

sau,

$$x^5(x^4-1)+x^4-1-0.$$

Descompunând în factori avem

$$(x^4-1)(x^5+1)=0$$

sau

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0.$$

Rezultă de aci rădăcina dublă $x_{1,2}=-1$, apoi, $x_3=1$, $x_{4,5}=\pm 2$, precum şi rădăcinele ultimului factor, care împărţit cu x^2, ne dă

$$(1)\qquad x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Notând

$$(2)\qquad x+\frac{1}{x}=y,\quad \text{deci}\quad x^2+\frac{1}{x}=y^2-2,$$

ecuaţia (1) devine

$$y^2-y-1=0$$

cu rădăcinele

$$y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Inlocuind în (2) această valoare, obţinem ecuaţiile de gradul al 2-lea

$$2x^2-(1+\sqrt{5})x+2=0,$$
$$2x^2-(1-\sqrt{5})x+2=0,$$

cu rădăcinele

$$x_{6,7}=\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}}{4},$$

$$x^{8,9}=\frac{\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}}{4}.$$

Soluţii bune date de d-nii: *Adomnichi Vasile* (Lic. Ar T.), *Baz Marcel* (Lic. Ar. T.), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Cocoş Gh.* (Lic. Ar. T.), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Corduneanu C-tin* (Colegiul N. Filipescu), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Diaconu Vasile* (Col. N. Filipescu), *Fleşeriu Eugen* (P., T.), *Gherlan Vasile* (Lic. Beiuş), *Guttman Tiberiu* (P., T.), *Ionescu C.* (Lic. Ar. T.), *Man Aurel* (Lic. Ar. T.), *Man Octavian*, *Mâncescu Ion* (Col. N. Filipescu), *Manolescu Gh.* (P., T.), *Marandici Alexandru* (Lic. Ar. T.), *Mărcuţiu Silviu* (P., T.), *Moroianu Aurel* (Lic. Ar. T.), *Negru Savu* (Lic. Ar. T.), *Novac Ioan* (P.,T.), *Ovesea Nicolae* (P., T.), *Pană R.* (Lic. Ar. T.), *Panait Ionel* (Lic. Ar. T.), *Panteq Alexandru* (Lic. Beiuş), *Pisanca Ionel* (Col. Loga, T.), *Poenaru Gh.* (P., T.), *Puşcaşiu Silviu* (P., T.), *Rădulescu Valeriu* (Lic. Ar. T.), *Răuţu Titus* (Lic. Ar. T.), *Rogoz Teodor* (Lic. Ar. T.), *Roman C-tin* (Col. Loga, Timişoara), *Stan Petru* (P., T.), *Stanciu Petre* (Lic. Ar. T.), *Ştefănescu Sofronie* (Lic. Ar. T.), *Tătaru Sever* (Lic. Ar. T.), *Târcomnicu C.* (Lic. Slatina), *Teiuşan Horia* (P., T.), *Teodorescu Petre* (Liceul Matei Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P., T.), *Velica Mircea* (Lic. Ar. T.) şi *Voinea Stelian* (Lic. Ar. T.).

Problema 2473. — *Dacă n este un număr prim, să se arate că expresia*

$$E=n^{82}-n^{60}-n^{22}+1,$$

se divide cu 1403.

C-PT. G. P. BOERESCU

Soluţie. Observăm că

$$1403=61\times 23.$$

Apoi, expresia dată se poate scrie

$$E=n^{60}(n^{22}-1)-(n^{22}-1)=(n^{60}-1)(n^{22}-1).$$

Numerile 61 şi 23 fiind prime, deci nedivizibile prin numărul prim n, urmează conform teoremei lui *Fermat* că,

$$n^{60}-1=\text{mult. }61,\quad n^{22}-1=\text{mult. }23,$$

prin urmare

$$E=\text{mult. }61\times\text{mult. }23=\text{mult. }61\times 23=\text{mult. }1403,$$

ceeace trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Adomnichi Vasile* (Lic. A., T.), *Baz Marcel* (Lic. A., T), *Blaga Ovidiu* (Lic. Cluj), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Gâlea Horaţiu* (Lic. A., T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gloden A.* (Luxembourg), *Hurezeanu Romulus* (Lic. Tg. Jiu), *Ionescu Corneliu* (Lic. A, T.), *Janca Spiridon* (Lic. A., T.), *Man Aurel* (Lic. A, T.), *Mâncescu Ion* (Col. N. Filipescu), *Neguţ Ionel* (Lic. Tg. Jiu), *Novac Ioan* (P. T.), *Panait Ionel* (Lic. A., T.). *Pârvu Ioan* (Lic. A, T.), *Pisanca Ionel* (Col. Loga, Timişoara), *Popescu Alexandru*, *Popescu Barbu* (P. T.), *Rădulescu Valeriu* (Lic. A., T), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj), *Răuţu Titus* (Lic. A., T.), *Ristea Gh.* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Roman C-tin* (Col. Loga, Timişoara), *Stanclu Petre* (Lic. A., T.). *Ştefan Ilie* (Lic. A. T.), *Stefănescu Sofronie* (Lic. A., T.), *Târcomnicu C.* (Lic. Slatina), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Turbuţiu Gh.* (Lic. Cluj), *Udrea Marin* (Lic. A., T), şi *Voinea Stelian* (Lic. A., T.).

PROBLEME PROPUSE

2521. — Cu numerile 304, 324, 334, 354, 395, 415, 424, 444, 514, 544, 564, 594, 605, 634, 655, 684, să se formeze un patrat magic de patru linii şi patru coloane, astfel ca suma numerelor de pe fiecare linie, coloană şi diagonală să fie egală cu 1947.

ILIE CONSTANTINESCU

2522. — In anul 1946 un intelectual fiind întrebat, în ce an a fost născut, răspunde: vrâsta mea este egală cu numărul format de ultimele două cifre ale anului ce reprezintă contingentul meu, iar dublul vrâstei mele este suma cifrelor anului contingent multiplicată cu patru. Se cer: anul naşterii; vrâsta; contingentul.

MAIOR G. P. BOERESCU

2523. — Să se arate că funcţiile,

$$y = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$z = \arcsin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}},$$

au aceiaşi derivată.

V. ALACI

2524. — Să se elimine α şi β între relaţiile

$$\begin{cases} a\sin^4\alpha + b\cos^4\alpha = c \\ a_1\sin^4\beta + b_1\cos^4\beta = c_1 \\ m\operatorname{tg}\alpha = n\operatorname{tg}\beta \end{cases}$$

EUGEN WEGENER

2525. — 1°. Să se arate că latura AB a unui eptagon regulat înscris în cercul de rază R, este dată de relaţia,

$$AB = \frac{R}{3}\sqrt{9x_1+21}, \tag{1}$$

unde x_1 este rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$x^3 - \frac{7}{3}x + \frac{7}{3^3} = 0. \tag{2}$$

2°. Să se rezolve ecuaţia (2) şi să se deducă apoi expresia laturei AB în funcţie de R, folosind relaţia (1).

C. MIHU

2526. — Inălţimile unui triunghiu ABC taie a doua oară cercul circumscris în A′, B′, C′. Dreapta lui *Simson* a punctului A′, mărginită la proecţiile lui pe AB şi AC este împărţită de piciorul înălţimei AA′, în două segmente. Analoagele lor, impreună cu ele, formează şase segmente egale două câte două.

GH. TH. GHEORGHIU

2527. — Să se demonstreze că suma

$$\operatorname{tg}(2\alpha + x)[1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2(\alpha + x)] + \operatorname{tg}(2\beta + x)[1 - \operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2(\beta + x)]$$

se divide prin $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ şi să se găsească câtul.

Să se examineze cazul particular

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1 = 0.$$

G-L GH. BUICLIU

2528. — Intr'un triunghiu sferic dreptunghiu, avem relaţia

$$sp\frac{B}{2} = \frac{\sin c}{\sin a + \sin b\cos c + \sin c}.$$

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Cocoş Gh. (2490, 2492, 2493, 2497, 2505. 2506, 2508 2509, 2510, 2519), *Cârcea Ioan* (2362, 2407, 2411, 2440, 2512); *Cioara Gh. Alexandru* (2360, 2391, 2411, 2443, 2456, 2466, 2472, 2476, 2477, 2480, 2484, 2488, 2489, 2490, 2491, 2493, 2496, 2502, 2504, 2505, 2508, 2510); *Gherlan Vasile* (P; 2397, 2417, 2420, 2455, 2473, 2475, 2476, 2477, 2480, 2483, 2491, 2493. 2502, 2505, 2506, 2508, 2509. 2510. *Gloden A.* (A; N.); *Hurezeanu Romulus* (2429), 2490, 2401, 2496, 2568); *Man Iosif* (P; 2427, 2454, 2505, 2508, 2519); *Neguţ Ion* (P; 1370, 1393, 2330, 2490, 2589); *Panţea Alexandru* (P; 2369, 2371, 2391, 2411, 2417, 2420, 2427, 2443, 2455. 2456, 2472, 2473, 2476, 2477, 2480, 2489, 2491, 2496, 2502, 2504, 2505, 2508, 2520); *Păunescu Gh.* (2496, 2497); *Schlomink Norbert* (2496); *Stănescu C-tin* (2456, 2473, 2490, 2496, 2497, 2512); *Stănilă Gh.* (2293, 2450, 2452, 2460, 2469); *Stefănescu Sofronie* (2293, 2411, 2418, 2435, 2450, 2452, 2460, 2469, 2476, 2488, 2490, 2497); *Teleagă D-tru* (P; 2380, 2508, 2509, 2519): *Urdăreanu P.* (2472, 2488, 2490, 2491).

INFORMAŢIUNI

A APĂRUT:

67 EXAMENE DE ADMITERE
LA POLITEHNICELE DIN ROMÂNIA
de
GH. TH. GHEORGHIU.

Fascicola I:
Probleme de geometrie plană şi în spaţiu . . . . . 140.000 lei
Fascicola II:
Probleme de algebră . . . . 120 000 lei

Aceste preţuri nu sunt valabile decât o lună de zile. Doritorii se vor adresa: Prof. GH. TH. GHEORGHIU, str. Harry Truman, No. 1, Timişoara. Costul expediţiei este de 10.000 lei pentru fiecare fascicolă şi se face pe riscul celui care comandă. Pentru siguranţă se va adăoga 30.000 lei taxe de recomandat (pentru ambele fascicole).

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Legându-se colecţiileR. M. T., anii II-XXV, în volume şi rămânând numere răzlete care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 12000 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II—XXV, cu preţul de lei 120.000 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Nu se primesc de la corespondenţi manuscrise iscălite sub pseudonim.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

ANUL XXVII. IULIE 1947 No. 5

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 15000 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 150000 LEI PE AN.
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 300.000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN VISA**: CUBICE IPERBOLICE UNICURSALE.
2 NOTE MATEMATICE 11, 12.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 268, 347, 393. 1749, 1858, 1906, 2122, 2197, 2459.
5. PROBLEME PROPUSE: 2529 - 2536.
6. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
S I B I U

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Anunţăm cu plăcere, că începând de la 15 Iulie 1947 mai face parte dintre membrii „R.M.T." şi distinsul nostru colaborator L-t. C-dor **C-tin Chiriac.**

Mulţumim călduros D-lui L-t. C-dor **C-tin Chiriac** pentru contribuţia lunară de 50.000 lei.

Am primit dela **D-l Ion Vodă** profesor la liceul „Mircea cel Bătrân" din Constanţa, 23 de abonamente la R. M. T. Ii aducem pe această cale mulţumirile noastre şi aşteptăm activitate dela nouii corespondenţi.

Am primit deasemeni o donaţie de 1.000.000 lei din partea elevilor liceului „Ferdinand I" din R.-Sărat prin D-l Prof. **Hr. Dăscălescu.** Le aducem tuturor mulţumirile noastre.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci**, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Costul abonamentului pe anul în curs este de 120.000 lei + 30 000 lei expediţia revistei, în total 150.000 lei. Rugăm pe abonaţii noştrii să achite această sumă până la data de 15 August. In caz contrar, cu părere de rău trebue să-i anunţăm, că începând cu n-rul 6 nu li se va mai trimite revista.

2. D-nii membrii în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara", sunt rugaţi să plătească, pe lângă costul abonamentului, taxa de membru de 120.000 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV şi XXVI sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 200.000 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50.000 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 30.000 lei pentru recomandat, câte 20.000 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 20.000 lei + 3.000 lei expediţia.

5. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Harry Truman, Nr. 1, Timişoara I, Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

6. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — No. 5. TIMISOARA, IULIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 15000 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 150.000 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timi oara I, Str. Harry Truman No. 1.

CUBICE IPERBOLICE UNICURSALE

DE

EUGEN VIȘA

Dându-se o dreapta (Δ), o iperbolă echilateră (H) și un punct O pe această iperbolă, dacă prin punctul O se duce o dreaptă variabilă, care intersectează a doua oară iperbola in M și dreapta (Δ) în N, punctul P al dreptei variabile care satisface relației:

$$\overline{OP} = \overline{MN}, \tag{1}$$

are drept loc geometric o cubică unicursală căreia, dată fiind analogia ei cu o cubică circulară unicursală, convenim a-i da numele de *cubică iperbolică unicursală.*

Pentru a dovedi în primul rând că locul punctului P definit prin relația geometrică (1) este în adevăr o cubică unicursală, vom transforma această relație în alta analitică, luând ca axe de coordonate, cele două drepte duse prin punctul O al iperbolei (H), paralele respectiv la cele două axe ale ei.

In modul acesta, iperbola (H) va avea o ecuație de forma:

$$x^2 - y^2 - 2ax + 2by = 0, \tag{2}$$

iar dreaptă (Δ), care nu e supusă à priori nici unei restricțiuni, va avea evident ecuația generală a unei drepte oarecare, adică de forma:

$$Ax + By + C = 0. \tag{3}$$

In ceeace privește în sfârșit dreapta variabilă dusă prin punctul O, care este origina axelor de coordonate, ecuația ei va fi:

$$y = mx, \tag{4}$$

coeficientul unghiular m fiind el însuși variabil.

Rezolvând acum sistemul format de ecuațiile (2) și (4) și îndepărtând soluția $x=0$, $y=0$, care corespunde originei, aflăm coordonatele punctului M și anume:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2(a - mb)}{1 - m^2} \\ y_1 = \dfrac{2m(a - mb)}{1 - m^2}. \end{cases} \tag{5}$$

La fel, rezolvând sistemul format de ecuațiile (3) și (4), găsim coordonatele punctului N, care sunt în speță:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{C}{A + Bm} \\ y_2 = -\dfrac{Cm}{A + Bm}. \end{cases} \tag{6}$$

Notând acum, coordonatele punctului variabil P, prin (x, y) și proectând relația geometrică (1) pe axa x-ilor, deducem relația:

$$x = x_2 - x_1 \tag{7}$$

care, în virtutea primei relații din (5) și a primei relații din (6), devine:

$$x = -\frac{C}{A + Bm} - \frac{2(a - mb)}{1 - m^2}, \tag{8}$$

de unde, ținând seama că, în virtutea ecuației (4),

$$m = \frac{y}{x},$$

obținem:

$$\boxed{(Ax+By)(x^2-y^2)+C(x^2-y^2)+2(ax-by)(Ax+By)=0}, \tag{9}$$

adică chiar ecuația locului geometric al punctului P, care se vede că este o cubică unicursală având origina ca punct dublu.

Natura punctului dublu. Punctul dublu al cubicei (9) fiind origina axelor de coordonate, ecuația comună a celor două tangente în acest punct,

va fi ecuaţia obţinută egalând cu zero grupul omogen al termenilor de gradul doi din ecuaţia acestei cubice, adică:

$$(10)\quad C(x^2-y^2)+2(ax-by)(Ax+By)=0,$$

sau, desvoltat şi ordonat

$$(11)\quad (C+2aA)x^2+2(aB-bA)xy-(C+2bB=0.$$

Să arătăm că aceste tangente sunt tocmai dreptele care unesc origina cu punctele de intersecţie ale dreptei (Δ) cu iperbola (H).

Pentru aceasta vom exprima în prealabil condiţia cu punctul M să fie pe dreapta (Δ), adică vom scrie că ecuaţia (3) a dreptei (Δ) este verificată de coordonatele (5) ale punctului M, ceeace ne dă:

$$\frac{2A(a-mb)}{1-m^2}+\frac{2mB(a-mb)}{1-m^2}+C=0$$

sau încă,

$$C(1-m^2)+2(a-mb)(A+mB)=0$$

sau final,

$$(12)\quad (C+2aA)+2(aB-bA)m-(C+bB)m^2=0.$$

Pentru a găsi acum efectiv ecuaţia comună a celor două drepte care unesc origina cu punctele de intersecţie ale dreptei (Δ) cu iperbola (H), nu ne mai rămâne decât să eliminăm pe m între ecuaţiile (4) şi (12). Efectuând această eliminare obţinem însă, precum se poate uşor constata, chiar ecuaţia (11) şi astfel afirmaţia făcută în privinţa tangentelor la cubică în punctul ei dublu este învederată.

Ţinând seama de această constatare, urmează că:

a) Dacă dreapta (Δ) este secantă iperbolei, punctul O al ei, adică origina axelor, este pentru cubică un punct dublu propriu zis, sau un punct *nodal.*

b) Dacă dreapta (Δ) este tangentă iperbolei, punctul O este un punct de *întoarcere* pentru cubică, pe care în acest caz, pentru analogia ei cu o cisoidă propriu zisă, vom numi-o *cisoidă iperbolică.*

c) Dacă dreapta (Δ) nu intersectează iperbola, punctul O va fi un punct cu tangentele imaginare, adică un punct *izolat* al cubicei.

Observaţie. In legătură cu punctul dublu al cubicei (9) mai considerăm interesant să arătăm că, în cazul când dreapta (Δ) trece prin centrul iperbolei, coeficienţii unghiulari m_1 şi m_2 ai celor două tangente în acest punct al ei verifică relaţia:

$$(13)\quad 1-m_1m_2=0,$$

analoagă relaţiei de perpendicularitate

$$(13')\quad 1+m_1m_2=0,$$

pe care o verifică în cazul similar al unei cubice circulare unicursale, adică al unei strofoide propriu zise, coeficienţii unghiulari ai aceloraşi tangente şi pentru care motiv, cubica (9) vom conveni să o numim în acest caz, *strofoidă iperbolică.*

In adevăr coordonatele centrului iperbolei (H) fiind (a, b), scriind că aceste coordonate verifică ecuaţa (3) a dreptei (Δ), obţinem:

$$(14)\quad aA+bB+C=0$$

de unde rezultă apoi

$$(15)\quad C=-(aA+bB).$$

Introducând această valoare a lui C în ecuaţia (11), aceasta devine:

$$(16)\quad (aA-bB)x^2+2(aB-bA)xy+(aA-bB)y^2=0.$$

Se vede însă pe această ecuaţie că produsul rădăcinilor ei, considerată ca ecuaţie în $m=\frac{y}{x}$, este 1 şi deci că, notând aceste rădăcini respectiv cu m_1 şi m_2, avem în adevăr satisfăcută relaţia (13).

Asimptote. Ecuaţia comună a direcţiilor asimptotice ale cubicei (9) se obţine egalând cu zero grupul termenilor de gradul al treilea din această ecuaţie, adică

$$(17)\quad (Ax+By)(x^2-y^2)=0.$$

Precum vedem însă, această ecuaţie se descompune în următoarele:

$$(18)\quad \begin{cases} Ax+By=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

ceeace ne arată că o cubică iperbolică unicursală are trei direcţii asimptotice reale, una paralelă cu dreapta (Δ) şi două paralele cu asimptotele iperbolei (H).

Să găsim acum poziţia asimptotelor. Pentru aceasta vom nota prin $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ respectiv grupul omogen al termenilor de gradul trei şi cel al termenilor de gradul doi din ecuaţia (9), adică:

$$(19)\quad \begin{cases} P(x,y) = (Ax + By)(x^2 - y^2) \\ Q(x,y) = Q(x^2 - y^2) + 2(ax - by)(Ax + By). \end{cases}$$

Scriind atunci ecuaţia unei asimptote sub forma

$$(20)\quad y = mx + n,$$

ordonata la origină n corespunzătoare unui m dat va avea expresia

$$(21)\quad n = -\frac{Q(1,m)}{P'_y(1,m)}.$$

In cazul nostru, avem însă:

$$(22)\quad P'_y = B(x^2 - y^2) - 2(Ax + By)y$$

şi deci

$$(23)\quad n = -\frac{C(1-m^2) + 2(a - bm)(A + Bm)}{B(1-m^2) - 2(A + Bm)m}.$$

Făcând în această relaţie $m = -\frac{A}{B}$, $m = 1$ şi $m = -1$, găsim respectiv $n = -\frac{C}{B}$, $n = a - b$ şi $n = -(a + b)$ ceeace ne arată că cele trei asimptote ale cubicei sunt

$$(24)\quad \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ y = x + (a - b) \\ y = -x - (a + b), \end{cases}$$

adică, dreapta (Δ), şi două paralele la asimptotele iperbolei (H) duse prin simetricul centrului acestei iperbole faţă de origina axelor.

Relativ la asimptota (Δ), avem în special de observat că, în cazul când ea este paralelă cu tangenta la iperbolă în punctul O, această asimptotă nu mai taie cubica la distanţă finită cum se întâmplă în cazul general al unei poziţii oarecare a ei.

In adevăr, căutând intersecţia cubicei (9) cu dreapta (Δ), căutând adică rezolvarea sistemului format de ecuaţia (9) şi ecuaţia dreptei (Δ), găsim că acest sistem se poate înlocui cu următorul sistem simplificat

$$(25)\quad \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ ax - by = 0. \end{cases}$$

Pe sistemul (25) se vede însă că punctul căutat e tocmai punctul de intersecţie a dreptei (Δ) cu tangenta în origină la iperbola (H), tangentă a cărei ecuaţie e tocmai

$$(26)\quad ax - by = 0,$$

aşa încât e învederat că, în cazul paralelismului dreptei (Δ) cu această tangentă, dreapta (Δ) nu mai taie cubica la distanţă finită.

Axe de simetrie. Cubice iperbolice unicursale drepte şi oblice. Vom zice că o cubică iperbolică unicursală este *dreaptă* sau *oblică*, după cum admite sau nu, o axă de simetrie.

Să cercetăm dară în ce condiţiuni o astfel de axă poate exista. Pentru aceasta observăm în prealabil că o axă de simetrie, în caz de existenţă, trebue să treacă prin punctul dublu al cubicei, adică, în cazul nostru, prin origina axelor şi să fie în acelaş timp axă de simetrie şi pentru ansamblul celor trei asimptote ale ei.

Vom deosebi aici două cazuri şi anume:

Cazul I. Cubice iperbolice unicursale drepte de prima speţă.

Presupunem în acest prim caz că asimptota (Δ) taie amândouă celelalte asimptote. Acestea din urmă fiind însă perpendiculare, căci sunt paralele respectiv cu cele două asimptote ale iperbolei (H), care sunt deasemenea perpendiculare, triunghiul format de cele trei asimptote ale cubicei în cauză, nu poate fi simetric decât dacă e dreptunghic isoscel. Urmează deci că dreapta (Δ) trebue să fie perpendiculară pe bisectoarea unghiului drept respectiv, deci şi pe axa Ox, ca fiindu-i paralelă, de unde rezultă că trebue să avem în primul rând

$$(27)\quad B = 0.$$

Pe lângă această condiţie, mai trebue apoi ca axa de simetrie să fie tocmai dreapta care uneşte origina cu punctul de coordonate $(-a, -b)$, care este vârful unghiului drept adineauri menţionat. Ecuaţia acestei drepte este însă

$$(28)\quad bx - ay = 0$$

şi cum această dreapta trebue să se confunde cu Ox, pentru a fi axă de simetrie şi pentru dreapta (Δ), rezultă condiţia:

$$(29)\quad b = 0.$$

Ţinând acum seama de condiţiile (27) şi (29), ecuaţia (9) a cubicei devine

$$(30)\quad (Ax + C)(x^2 - y^2) + 2aAx^2 = 0$$

şi astfel se vede că în acest caz cubica însăşi admite ca axă de simetrie axa Ox, ecuaţia ei neschimbându-se prin înlocuirea lui y prin $-y$.

Rezolvând ecuaţia (30) de mai sus în raport cu y şi introducând în plus notaţia

(31) $$C = -kA,$$

deducem

(32) $$\boxed{y = \pm x\sqrt{\frac{x-(k-2a)}{x-k}}}$$

care este, sub formă de funcţie explicită, ecuaţia unei cubice iperbolice drepte de prima speţă.

In particular pentru $k = a$ şi $k = 2a$, deducem respectiv

(33) $$\boxed{y = \pm x\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}}$$

şi

(34) $$\boxed{y = \pm x\sqrt{\frac{x}{x-2a}}},$$

prima din aceste eucaţii fiind aceea a unei *strofoide iperbolice drepte*, iar a doua, a unei *cisoide iperbolice drepte.*

Graficul funcţiunii (33) constitue obiectul problemei 2530 din numărul de faţă al acestei reviste, iar aceea al funcţiei (34) se poate găsi de exemplu în cursul universitar de Geometrie analitică al regretatului profesor *N. Abramescu* dela Universitatea din Cluj.

Cazul II. Cubice iperbolice unicursale drepte de a doua speţă.

Presupunem în acest al doilea caz că dreapta (Δ) este paralelă cu una oarecare din celelalte două asimptote ale cubicei (9), de pildă cu asimptota

(35) $$y = x + (a - b).$$

Rezultă deci că avem în prealabil îndeplinită condiţia

(36) $$A + B = 0.$$

Evident acum că axa de simetrie a cubicei, în caz de existenţă, va trebui să treacă tot prin origină, dar trebuind în plus, să fie axă de simetrie şi pentru ansamblul întreg al celor trei asimptote, nu poate fi decât asimptota a treia, adică:

(37) $$y = -x - (a + b).$$

Scriind că aceasta din urmă asimptotă trece prin origină, obţinem condiţia

(38) $$a + b = 0,$$

axa de simetrie reducându-se în acest caz la a doua bisectoare a axelor de coordonate, adică la

(39) $$y = -x.$$

Scoţând acum din relaţiile (36) şi (38) valorile lui B şi b şi introducându-le în ecuaţia (9), deducem că, în acest caz, această ecuaţie devine:

(40) $$A(x-y)(x^2-y^2) + C(x^2-y^2) + 2aA(x^2-y^2) = 0$$

sau

(41) $$(x^2-y^2)[A(x-y) + C + 2aA] = 0$$

ceeace ne arată că, în acest al doilea caz, cubica degenerează în dreplele

(42) $$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ A(x-y) + C + 2aA = 0. \end{cases}$$

Conchidem deci, că nu avem cubice iperbolice unicursale drepte propriu zise de speţa a doua, ci numai degenerate în ansamblul celor trei drepte de mai sus.

NOTE MATEMATICE

11. — *Curiosités arithmétiques dans divers systèmes de numération.*

I. *Dans tout système de numération la somme des chiffres du carré de* B — 1 *est égale* B — 1.

En effet, $(B-1)^2 = B^2 - 2B + 1 = B(B-2) + 1$.

Exemples: Base 10 : $9^2 = 81_{10} = (8+1)^2$

„ $9 : 8^2 = 71_9 = (7+1)^2$

II. *Si la base* B *est telle que* $8 \leq B \leq 11$ *la somme des chiffres du cube de* B — 2 *égale* B—2.

En effet, $(B-2)^3 = B^3 - 6B^2 + 12B - 8$

$= B^2(B-5) + B(11-B) + B - 8,$

avec

$$B - 5 + 11 - B + B - 8 = B - 2.$$

Base 11 : $9^3 = 603_{11} = (6+0+3)^3$

10 : $8^3 = 512_{10} = (5+1+2)^3$

9 : $7^3 = 421_9 = (4+2+1)^3$

8 : $6^3 = 330_8 = (3+3+0)^3$.

III. *Dans tout système de numération de base* $B \geq 3$, *la moitié de la somme des chiffres du cube de* $B-1$ *est égale à* $B-1$.

Car, $(B-1)^3 = B^2(B-3)+2B+B-1$.

Exemples: Base $10: 9^3 = 729_{10} = \left[\frac{1}{2}(7+2+9)\right]^3$.

„ $9: 8^3 = 628_9 = \left[\frac{1}{2}(6+2+8)\right]^3$.

IV. *Dans tout système de numération de base* $B > 4$, *la somme des chiffres du carré de* $B-2$ *égale la base* B.

En effet, $(B-2)^2 = B(B-4)+4$.

Exemples: Base $10: 8^2 = 64_{10}$; $6+4=10$.

„ $11: 9^2 = 74_{11}$; $7+4=11$.

V. *Dans tout système du numération de base* $B \geq 4$, *la moitié de la somme des chiffres du bicarré de* $B-1$ *est égale à* $B-1$.

En effet, $(B-1)^4 = B^3(B-4)+5B^2+B(B-4)+1$.

Exemples:

$$B=10;\ 9^4 = 6561_{10} = \left[\frac{1}{2}(6+5+6+1)\right]^4$$

$$B=9;\ 8^4 = 5551_9 = \left[\frac{1}{2}(5+5+5+1)\right]^4.$$

La propriété subsiste pour $B=4$ et pour $B=3$.

VI. *Dans tout système de numération de base* $B \geq 10$, *on a* $(B-1)^5 = \overline{B-5}\ 9\ \overline{B-10}\ 4\ \overline{B-1}$.

En effet, $(B-1)^5 = (B-5)B^4+9B^3+(B-10)B^2+4B+(B-1)$

Exemples: $B=10;\ 9^5 = 59049_{10}$

$B=11;\ 10^5 = 6914a_{11}$ $\quad (a=10)$.

A. GLODEN

---

12. — *Aplicații ale Trigonometriei patratice la Trigonometria sferică.*

Intr'un triunghiu sferic dreptungiu, avem relațiile:

1. $\operatorname{tg} C = (\operatorname{tg} C + \operatorname{cosec} b)\ sp\ c$.
2. $\operatorname{tg} B = (\operatorname{tg} B + \operatorname{cosec} c)\ sp\ b$.
3. $\sec C = (\sec C + \operatorname{cotg} b)\ sp\ a$.
4. $\sec B = (\sec B + \operatorname{cotg} c)\ sp\ a$,

dacă $b,\ c < 90^0$.

Considerăm un triunghiu sferic dreptunghic ABC, O centrul sferei. $B_1A_1 \perp OA, A_1C_1 \perp OC, \sphericalangle B_1C_1A_1 = C$.

In $\Delta O A_1 B_1$ aplicăm o teoremă cunoscută din Trigonometria patratică:

$$(1) \qquad B_1A_1 = (B_1A_1 + OA_1)\ sp\ c.$$

$B_1A_1 = C_1A_1 \operatorname{tg} C$, $OA_1 = C_1A_1 \operatorname{cosec} b$. Inlocuind în (1) avem: $\operatorname{tg} C = (\operatorname{tg} C + \operatorname{cosec} b)\ sp\ c$. Analog avem $\operatorname{tg} B = (\operatorname{tg} B + \operatorname{cosec} c)\ sp\ b$.

In ΔB_1C_1O:

$$(2) \qquad B_1C_1 = (B_1C_1 + OC_1)\ sp\ a.$$

$B_1C_1 = C_1A_1 \sec C$, $OC_1 = C_1A_1 \operatorname{cotg} b$. Inlocuind în (2) avem: $\sec C = (\sec C + \operatorname{cotg} b)\ sp\ a$. Analog avem:

$$\sec B = (\sec B + \operatorname{cotg} C)\ sp\ a.$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică.* Anul LII, No. 10, Iunie 1947 Perspectiva directă și teorema lui *Desargues* de *Adrian Gheorghiu.* Raport asupra acordării premiului de trigonometrie *„V. Cristescu"*, de Ing. *I. S. Antoniu*, G-l *Gh. Liteanu* și *Al. V. Niculescu.* Note matematice, Probleme rezolvate și propuse.

2. *Annalles Scientifique de L'université de Jassy*, T. XXVII, 1941. Biaxiale Differentielgeometrie der Kurven und Regelflächen, von *O. Mayer.* Sur une nouvelle classe d'équation différentielle, par *Victor Nadolschi.* Sur la méthode de *Hanzen* pour le calcul des éclipses de soleil, par *G. V. Siadbei.* Cuprinde și chestiuni de Fizică și Chimie.

3. *Annalles Scientifique de L'Université de Jassy*, T. XXVIII, 1942. Sulle linee asimtotiche della superficie di *Steiner*, di *C. P. Bogdan.* Sur la classe des fonctions analytiques qui gardent les demi-plans déterminés par l'axe réel, par *C. Al. Climescu.* Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur, par *I. Popoviciu.* Sur l'approximation des fonctions continues d'une variable réelle par des polynomes, par *Tiberiu Popoviciu.* Sur la détermination des points de convergence des courants d'étoiles de *Kapteyn*, par *V. Siadbei.* Cuprinde și chestiuni de Fizică și Chimie,

4. *Annalles Scientifique de L'Université de Jassy*, T. XXIX, 1943. Sur la géométrie d'un grouppe de contact, par *A. Haimovici.* Les espaces à connexion affines à parallelisme absolu et les systèmes homographiques des courbes, par *M. Haimovici.* Sur certaines congruences de droites et suites de *Laplace*, par *O. Mayer.* Cuprinde și chestiuni de Fizică și Chimie.

5. *Alexandru Stoenescu:* Teoria Relativității.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 268. — *Fie două parabole cu axele paralele; să se demonstreze că locul geometric al polului unei drepte tangente la una din parabole, în raport cu ceialaltă parabolă, este tot o parabolă cu axul paralel cu acel al parabolelor considerate.*

E. ABASOHN

Soluție. In general locul polurilor tangentelor unei conice (C) față de o conică (Γ) este conica (C′) polara reciprocă a conicei (C); și invers locul polurilor tangentelor la conica (C′), față de conica (Γ), este conica (C). In cazul nostru, conicele (C) și (Γ) fiind parabole cu axele paralele, vor fi tangente în același punct M la dreapta (Δ) dela infinit a planului. Aceasta însemnează că polul dreptei (Δ) față de conica (Γ) este M, adică (C′) va trece prin M și va fi tangentă la (Δ) în acest punct. Conica (C′) fiind tangentă dreptei dela infinit este o parabolă a cărei axă va trece prin punctul de contact, adică prin M, adică va fi paralelă cu axele primelor două parabole.

Soluții analitice date de d-nii: *C. Berdan, C. Coșniță, I. Goldștein, P. Katz, C. Gh. Lupescu, O. Smigelschi, M. Stamatiu,* și *P. Tărăbuță.*

Gh. Th. Gh.

Problema 347. — *Un automobil merge cu o viteză uniformă pe o șosea. Știind că stâlpii de telegraf sunt așezați la 30 m. unul de altul, să se stabilească formula după care s'ar putea calcula mai ușor viteza automobilului în Km/oră prin numărarea stâlpilor pe lângă care trece.*

I. PROTOPOPESCU

Soluție. Fie $n+1$ numărul stâlpilor numărați într'un interval de timp pe t secunde

$$(1) \qquad V_{m/sec.} = \frac{30\,n}{t^s}$$

Pentru a avea viteza pe oră, înmulțim rezultatul (1) cu 3600 (numărul secundelor dintr'o oră), iar pentru a-l avea în Km, împărțim cu 1000.

$$V_{Km/oră} = \frac{30\,n}{t^s} \times \frac{3600}{1000} = \frac{108\,n}{t^s}.$$

Soluția dată de d-nii: *Popescu Stelian* (București), *Irimie Staicu* (Brașov), *Dionisie Curcubătă* (Brașov), *Gradin Gheorghe* (Câmpina).

Gh. S.

Problema 393. — *Are expresiunea*

$$e^{-e^{-e^{-e^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

o limită?

V. VALCOVICI

Soluție. Rezolvarea problemei o împărțim în două In primul loc să considerăm ecuația

$$e^{-x} - x = 0.$$

Această ecuație are o rădăcină reală. In adevăr, considerând curba cunoscută $y = e^{-x}$ și se constată că taie o singură dată bisectoarea primului cadran, $y = x$. Fie a această rădăcină. Ea poate fi calculată printr'una din metodele cunoscute, sau mai ușor cu ajutorul lui *Hütte.* In adevăr, în tabela 4 se constată că $e^{-0,56} \sim 0,57$ și $e^{-0,57} \sim 0,56$; deci putem lua $a = 0,56$.

Trecem acum la rezolvarea problemei. Insemnând cu u_n expresia din enunț, în ipoteza că avem n exponenți suprapuși, atunci relația de definiție a șirului este

$$(1) \qquad u_{n+1} = e^{-u_n} = f(u_n)$$

unde am pus: $f(x) = e^{-x}$. Aplicând acestei funcțiuni formula mediei, avem

$$(2) \quad f(u_n) - f(a) = u_{n+1} - a = (u_n - a) f'(c_n)$$

în baza lui (1), c_n fiind un număr cuprins între u_n și a. Făcând în (2) $n = 1$, avem

$$u_2 - a = (u_1 - a) f'(c_1)$$

unde: $u_1 = e^{-e} = 0,067 < c_1 < 0,56$. Cum $|f'(x)| = e^{-x}$ este o funcție descrescătoare, însemnează că oricare ar fi c_1 în acest interval, $|f'(c_1)| \leq e^{-0,067} \sim = 0,94 = b$. Deci putem scrie

$$(3) \quad |u_2 - a| = |u_1 - a|\,|f'(c_1)| < b\,(u_1 - a).$$

Analog vom avea

$$|u_3 - a| = |u_2 - a|\,|f'(c_2)|$$

unde c_2 este un număr cuprins între u_2 și a. Cum $b < 1$, inegalitatea (3) ne spune că intervalul $u_2 - a$ este interior lui $u_1 - a$ și deci oricare ar fi c_2 putem scrie $|f'(c_2)| < b$, adică

$$u_3 - a| < |u_2 - a|\,b < b^2 |u_1 - a|.$$

Din aproape în aproape vom demonstra inegalitatea generală

$$|u_n - a| < b^{n-1} |u_1 - a|$$

și care ne spune, deoarece $b < 1$, că

$$\lim_{n-\infty} u_n = a = 0,54\ldots$$

Expresia dată are deci o limită.

Soluțiile primite nu pot fi luate în considerare. Problema a fost trecută ca exercițiu în „*Culegere de probleme de Algebră*“ de *A. G. Ioachimescu*, Cap. XXXII, pr. 53, (ed, III-a). Soluția dată acolo este incomplectă.

Gh. Th. Gh.

Problema 1749. — *Se dau două cercuri* O_1 *și* O_2, *cercul* O_1 *trecând prin centrul lui* O_2. *Să se demonstreze că orice punct* M *depe cercul* O_1 *se bucură de proprietatea*

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \text{coarda } \overline{PB},$$

unde AB *este coarda comună, iar* P *intersecția lui* MB *cu cercul* O_2.

SLT. MARIN F. ȘTEFANESCU

Soluția. Centrul cercului O_2 desparte cercul O_1 în două arce: arcul interior cercului O_2 și arcul exterior acestui cerc. Proprietatea din enunț nu este adevărată decât pentru puncte M situate pe primul arc. In adevăr, fie M un asemenea punct. In cercul O_1, ungh. $ABM = \frac{1}{2}$ arc AM, iar în cercul O_2 același unghiu are drept valoare $\frac{1}{2}$ arc AP. Aceasta însemnează că arcele AM și AP au aceiași măsură Cum ungh. PO_2A este la centru $=$ arc $AP =$ arc $AM = 2$ ungh. MO_2A, ultimul unghiu fiind înscris în cercul O_1. Deci ungh. $MO_2A = \frac{1}{2}$ ungh. $PO_2A =$ ungh. MO_2P. Triunghiurile MO_2A și MO_2P sunt egale ca având un unghiu egal cuprins între două laturi egale. Deci

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MP} + \overline{MB} = \overline{PB}.$$

In cazul că se ia punctul M pe cercul O_1 exterior cercului O_2, atunci analog se poate demonstra că avem

$$|\overline{MA} - \overline{MB}| = \overline{PB}.$$

Soluția dată de d-nii: *Hr. Șt. Dăscălescu* (Focșani), *Borneas Marius* (Arad), *Cristea N. I.* (Blaj) și *Drăgilă P.* (Cluj).

Gh. Th. Gh.

Problema 1858. — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, format prin sudarea a trei patrate.*

G-L GH. BUICLIU

Soluție. Fie

$$N^2 = abcde \quad \therefore \quad N \leq 316$$

patratul de 5 cifre căutat, format prin alăturarea a 3 patrate. Dacă $e = 0$ atunci și $d = 0$ și *convenind* a admite că 0 este patratul lui 0. Vom avea un prim grup de 22 soluții de forma $abc00$, în care abc este patratul unuia din numerele de la 10 la 31 inclusiv.

Dacă convenim a admite că 00 este patratul lui 00 și dacă $c \neq 0$ atunci abc este unul din patratele de 3 cifre

$13^2 = 169$, sau 001, 004, 009, 016, 025, 036, 049, 064, 081

formate prin sudarea a 2 patrate.

Dacă însă *simultan* cu $e = 0$ avem și $c = 0$, atunci $b = 0$ și vom găsi 9 soluțiii de forma $a0000$ în care a este patrat perfect.

Lăsând la o parte aceste soluții banale, să presupunem $e \neq 0$.

Soluția problemei comportă examinarea următoarelor 6 cazuri:

$1^0.$ $e = m^2$, $d = n^2$, $abc = p^2$.
$2^0.$ $e = m^2$, $cd = n^2$, $ab = p^2$.
$3^0.$ $e = m^2$, $bcd = n^2$, $a = p^2$.
$4^0.$ $de = m^2$, $c = n^2$, $ab = p^2$.
$5^0.$ $de = m^2$, $bc = n^2$, $a = p^2$.
$6^0.$ $cde = m^2$, $b = n^2$, $a = p^2$.

Cazul 1^0. e sau d au una din valorile 1, 4, 9 și ținând seamă de ultimele 2 cifre ale unui patrat perfect, rezultă că de poate avea valorile 41 sau 49, așa că N^2 poate fi unul din numerele

$$abc46, \text{ sau } abc49.$$

Se găsește ușor că patratele terminate în 41 și 49 sunt date respectiv de formula

$$(50t \pm 21)^2 \quad \text{și} \quad (50t \pm 7)^2.$$

Deci N se găsește printre numerele ≤ 316,

$(50t \pm 21)$: 029, 071, 079, 121, 129, 171, 179, 221, 229, 271, 279.

$(50t \pm 7)$: 007, 043, 057, 93, 107, 143, 157, 193, 207, 243, 257, 293, 307.

Ridicând la patrat pe fie-care din aceste numere se găsește numai soluția de formă

$$N^2 = 00039.$$

Cazul 2°. In acest caz putem avea

$$e = 1,4 \text{ sau } 9$$

cd şi $ab = 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64$ sau 81.

Ţinând seamă de ultimele 2 cifre ale unui patrat perfect şi scriind fiecare valoare a lui cd cu e se găseşte că cde ar putea avea valori printre numerele

3041, 044, 049, 161, 164, 169, 61, 364, 369, 641, şi 649.

Inaintea fie-căruia din aceste numere scriem pe fiecare din valorile lui ab. Făcând descompuneri în factori primi, sau extrageri de rădăcini, găsim că printre numerele astfel formate avem numai soluţia

$$129^2 = 16641 \text{ cu } 16 = 4^2,\ 64 = 8^2 \text{ şi } 1 = 1^2.$$

Cazul 3°. Ca şi la 2° putem avea pentru a şi e valorile 1,4 sau 9 aşa că N^2 va trebui căutat printre numerele

$$1n^21,\ 1n^24,\ 1n^29,\ 4n^21,\ 4n^24,\ 4n^29,\ 9n^21,$$
$$9n^24,\ 9n^29$$

în care $n^2 = bcd$.

Fie $N^2 = 1n^21$. In acest caz n^2 trebue să se termine cu 0,4 sau adică n să fie un număr mai mic ca 32 de una din formele $10t$, $10t \pm 2$, $10t \pm 4$. Patratele acestor numere, adică n^2, sunt

004, 016, 036, 064, 100, 144, 196, 256, 324, 400, 484, 576, 676, 784 sau 900.

Intercalând aceste numere între cifrele 1 nu găsim nici un patrat de forma $1n^21$ cu $n^2 < 32$.

Procedând la fel şi pentru $a = 0$ se găsesc pentru cazul 3° soluţiile formale

$$39^2 = 01444 \text{ cu patratele } 0,144,4$$
$$57^2 = 03249 \text{ cu patratele } 0,324,9.$$

Pentru cazurile 4°, 5° şi 6° găsim, pe aceiaşi cale soluţiile

$102^2 = 10404$; $107^2 = 11449$; $108^2 = 11664$; $191^2 = 36481$; $201^2 = 40401$; $204^2 = 41616$; $201^2 = 43681$; $223^2 = 49729$; $253^2 = 64009$ şi $315^2 = 99225$.

A dat soluţiile exacte d-l *E. Wegener* (Bacalaureat, Bucureşti) D-nii *Godea P. Ioan* şi *Ionescu F. Petru* (au dat soluţii parţiale).

Gh. B.

Problema 1906. — *Să se găsească un număr de forma abba, căruia adunându-i 4 să ne dea un patrat perfect.*

SAVEL ŢARALUNGA

Soluţie dată de d-l *Const. Chiriac.* Dacă N este rădăcina patrată a lui $abba + 4$, atunci

$$N^2 - 4 = 11(91a + 10b);\ (N-2)(N+2) = 11(91a + 10b),$$

ceiace spune că cel puţin unul din factorii primei părţi trebue să se dividă cu 11. Mai ţinem seamă şi de faptul că N^2 trebuind să aibă patru cifre este cuprins între 32 şi 100.

1° $N - 2 =$ mult. 11. Atunci $N - 2 = 33, 44, 55, 66, 77, 88$ şi deci $N + 2 = 37, 48, 59, 70, 81, 92$. Făcând produsul $(N-2)(N+2)$ constatăm că singurele numere de forma din enunţ sunt $33 \times 37 = 1221$, $44 \times 48 = 2112$ şi care dau soluţiile:

$$1221 + 4 = 35^2,\ 2112 + 4 = 46^2.$$

2°. $N + 2 =$ mult. 11. O discuţie asemănătoare cu precedenta nu dă nici o soluţie nouă.

Alte soluţii date de d-nii: *Bakonyi C.* (Timişoara), *Becu Crunu*, Locot. *G. P. Boerescu* (Constanţa), *Bossie V. B.* (Chişinău), *Checian N. Ana* (Timişoara), Sub.-Lt. *Enache I.* (Giurgiu), *Gâţă Gh. Gh.* (Tg -Jiu), *Gligor N. I.* (Timişoara), *Golea I.* (Beiuş), *Ionescu F. P.* (Craiova), *Popescu I. Adr.* (Timişoara), *Tincu C. C.* (Timişoara), *Ţigănoiu I. Alex.* (Timişoara), *Vasiliu Gh. D-tru* (Timişoara) şi *Wegener E.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2122. — *Să se găsească patratul de cinci cifre abcde ştiind că diferenţa $ab - de$ sau $de - ab$ este egală cu c sau c^2.*

G-L. GH. BUICLIU

Soluţia. Enunţul cere examinarea următoarelor 4 egalităţi:

$$\text{(I)}.\ ab - de = c;\quad \text{(II)}.\ ab - de = c^2$$
$$\text{(III)}.\ de - ab = c;\quad \text{(IV)}.\ de - ab = c^2$$

1°. *Egalitatea (I).* Fie N^2 patratul căutat. Trebue să avem

$$abcde = 10^3 ab + 10^2 c + de = N^2,$$

sau ţinând seamă de (I):

$$10^3 de + (10^3 + 10^2)\, c + de = N^2$$
$$\therefore\ 1001\, de + 1100\, c = 11\,[91\, de + 100\, c] = N^2$$

Pentru ca membrul întâi să fie patrat perfect,

trebue ca paranteza să se dividă neapărat prin 11, iar pentru aceasta trebue ca

$$88\,de + 99\,c + 3\,de + c = 88\,de + 99\,c + 22\,d + 8\,d + 3\,e + c = 11\,m$$

$$(1) \quad \therefore \quad 8\,d + 3\,e + c = 11\,m$$

Cifra e fiind terminaţie de patrat perfect are valorile 0, 1, 4, 5, 6, sau 9.

Fie $e = 0$. In acest caz $d = 0$ şi din (1) rezultă $c = 0$, deci şi $b = 0$ şi atunci a este patrat perfect. Dar formele $a^2 \times 10000$ nu dau soluţii

Fie $e = 1$. Vom avea $d = 0$, 2, 4, 6 sau 8. Ducând aceste valori în (1) se obţin valori pentru c. Odată cunoscute c, d şi e se scoate din (1) valoarea lui ab şi apoi se verifică dacă numărul $abcde$ ce se obţine este sau nu patrat perfect.

Examinând pe această cale toate valorile lui e se găsesc următoarele 2 soluţii

$$23716 = 154^2, \text{ cu } 23 - 16 = 7$$
$$27225 = 165^2, \text{ cu } 27 - 25 = 2$$

2°. *Egalitatea (II).* Găsim ca la 1°.

$$N^2 = 1001\,de + 9990\,c^2 + 99\,c + 0\,c^2 + c.$$

Faţă de divizorul 11 un patrat perfect poate fi de una din formele

$$\text{Mult. } 11 + 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5, \text{ sau } 9.$$

Căutăm valorile lui c care fac pe $10\,c^2 + c$ de una din aceste forme şi găsim că c poate lua valorile

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6, \text{ sau } 9.$$

Ţinem seama că de fiind terminaţie de patrat perfect poate avea una din valorile şirului

00, 01, 21, 41, 61, 81, 04, 24, 44, 68, 84, 25, 16, 36, 56, 76, 96, 09, 29, 49, 69, sau 89.

Asociem la fie-care valoare a lui c pe fie-care valoare a lui de din acest şir şi determinăm valori pentru ab cu ajutorul relaţiei (II). De exemplu pentru

$$c = 2 \quad \text{şi} \quad de = 28$$

găsim $ab = 24$ care ne dă numărul

$$abcde = 24228 \text{ cu } 28 - 24 = 2^2.$$

Examinând pe această cale toate cazurile posibile nu găsim soluţie pentru (II).

3°. *Egalităţile (III) şi (IV)* se examinează ca la 2°, tot cu ajutorul criteriului formei unei patrat perfect faţă de divizorul 11 şi se găseşte că (III) *nu are soluţii*, iar pentru (IV) avem soluţiile

$$12321 = 111^2, \text{ cu } 21 - 12 = 3^2$$
$$35344 = 188^2, \text{ cu } 44 - 35 = 3^2.$$

D-l *Chiriac Const.* şi d-l *Barbu Virgil* au examinat *toate* cazurile şi au găsit *toate* soluţiile. D-l *Munteanu Gh. Lucian* a examinat minuţios toate cazurile dar n'a găsit de cât 2 soluţii. D-nii *Bossie V., Boris, Godea Ioan, J. Mahrenholz* şi *Popescu I. Barbu* au dat soluţii cu totul parţiale, fără a examina toate cazurile.

Gh. B.

Problema 2197. — *Să se rezolve şi să se discute ecuaţia*

$$x^4 - 2x^3 + ax^2 + (1 - a)x + b = 0.$$

G-L GH. BUICLIU

Soluţie Dacă punem

$$(1) \qquad x = z + \frac{1}{2},$$

ecuaţia din enunţ se transformă în ecuaţia bipatrată

$$(2) \qquad z^4 + \left(a - \frac{3}{2}\right)z^2 + \left(b + \frac{5}{16} - \frac{a}{4}\right) = 0$$

uşor de rezolvat.

Discuţie. La ori ce rădăcină a ecuaţiei (2) corespunde o rădăcină a ecuaţiei din enunţ, dată de relaţia (1). Vom deosebi cazuri, după realizantul ecuaţiei (2). Acest realizant este

$$R = (a - 1)^2 - 4\left(b + \frac{5}{16} - \frac{a}{4}\right) = (a - 1)^2 - 4b.$$

Cazul 1°. $R < 0$. In acest caz trebuie să avem neapărat $b > 0$, aşa că $R < 0$ devine

$$(a - 1 - 2\sqrt{b})(a - 1 + 2\sqrt{b}) < 0$$

sau

$$[a - (1 + 2\sqrt{b})][a - (1 - 2\sqrt{b})] < 0$$
$$\therefore \quad 1 - 2\sqrt{b} < a < 1 + 2\sqrt{b}$$

Ecuaţia (2) are 4 rădăcini imaginare.

Cazul 2°. $R = 0$. In acest caz avem

$$a = 1 - 2\sqrt{b}, \text{ sau } \quad a = 1 + 2\sqrt{b}.$$

Rezolvanta

$$y^2+\left(a-\frac{3}{2}\right)y+\left(b+\frac{5}{16}-\frac{a}{4}\right)=0$$

a ecuației (2) are rădăcina dublă $\frac{3-2a}{2}$.

Dacă $a<\frac{3}{2}$ ecuația din enunț are 2 rădăcini duble egale.

Dacă $a=\frac{3}{2}$ ecuația (2) are o rădăcină cuadruplă nulă, iar ecuația din enunț o rădăcină cuadruplă egală cu $\frac{1}{2}$.

Dacă $\frac{3}{2}<a$ ecuația dată are 2 rădăcini duble imaginare.

Se deduce în concluzie că pentru $a=1-2\sqrt{b}$ avem 2 rădăcini duble reale, iar pentru $a=1+2\sqrt{b}$, avem cele 3 cazuri indicate după valorile lui a față de $\frac{3}{2}$.

Cazul 3°. $(a-1)^2-4b>0$ Dacă $b<0$ această condiție este verificată în totdeauna. Dacă $b>0$, ea este verificată fie pentru $a<1-2\sqrt{b}$, fie pentru $b+2\sqrt{b}<a$. Să considerăm produsul rădăcinilor ecuației (3):

$$P=b+\frac{5}{16}-\frac{a}{4}.$$

Fie $P<0$ $\therefore \frac{5}{3}+4b<a$. In acest caz condiția $(a-1)^2-4b>0$ este totdeauna îndeplinită, rădăcinele ecuației (3) sunt de semne contrare, ecuația (2) și deci ecuația dată are două rădăcini reale și două imaginare

Fie $P=0$. Una din rădăcinile ecuației (3) este nulă, cealaltă este $\frac{3}{2}-a$. Fie $a<\frac{3}{2}$ $\therefore$ $b<\frac{1}{10}$ și ecuația dată are o rădăcină egală cu $\frac{1}{2}$ și celelalte 2 rădăcini reale. Dacă $\frac{3}{2}<a$ $\therefore \frac{1}{16}<b$ atunci ecuația are rădăcina dublă $\frac{1}{2}$ și două rădăcini imaginare.

In fine dacă $P<0$, rădăcinile ecuației (3) au semnul sumei lor $\frac{3}{2}-a$. Pentru $a<\frac{3}{2}$ rădăcinile ecuației (3) sunt pozitive, deci acelea ale ecuației date sunt reale. Pentru $\frac{3}{2}<a$, deci $\frac{1}{16}<b$ rădăcinile lui (3) sunt negative, deci rădăcinile care ne interesează sunt imaginare.

Când $b<0$ și $a<\frac{5}{4}+4b$, ceia ce dă *a fortiori* $a<\frac{3}{2}$, cele 4 rădăcini sunt reale.

Dacă $b<0$ și $\frac{5}{4}+4b<a$ numai două rădăcini sunt reale.

In rezumat, discuția de până aici este cuprinsă în tabloul următor

$b<0$	$a<\frac{5}{4}+4b$ ... 4 răd. reale
	$a=\frac{5}{4}+4b$ ... 1 răd. dublă $=\frac{1}{2}$ și 2 răd. reale
	$\frac{5}{4}+4b<a$ ... 2 răd. reale și 2 imag.
$0<b$	$a<1-2\sqrt{b}$ ... 4 răd. reale
	$a=1-2\sqrt{b}$ ... 2 răd. duble r.
	$1-2\sqrt{b}<a<1+2\sqrt{b}$ ... 4 răd. imag.
	$a=1+2\sqrt{b}$ { $a<\frac{3}{2}$ ... 2 răd. duble reale; $a=\frac{3}{2}$ ... 4 răd. egale cu $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}a<$ ... 2 răd duble imag.
	$1+2\sqrt{b}<a<\frac{5}{4}+4b$ { $a<\frac{3}{2}$ ... 4 răd reale; $\frac{3}{2}<a$ ... 4 răd imag.
	$a=\frac{5}{4}+4b$ { $b<\frac{1}{16}$ ... 2 răd. egale cu $\frac{1}{2}$ și 2 reale; $\frac{1}{16}<b$ ... 2 răd. egale cu $\frac{1}{2}$ și 2 imaginare
	$\frac{5}{4}+4d<a$ ... 2 răd. reale și 2 imag.

D-șoara *Maian I. Ana* și d-l *Mahrenholz I.* au pus ecuația dată sub forma

$$x^2(x-1)^2+(a-1)x(x-1)+b=0$$

și au rezolvat-o în raport cu $x(x-1)$. Discuția este mai anevoioasă din cauza radicalilor suprapuși.

Soluții parțiale s-au primit de la d-nii: *Frunză R.* și *Șerengău M.*

Gh. B.

Problema 2459. — *Să se arate că într'un triunghiu isoscel ($b=c$), avem relaţia*

$$\frac{b^m \log \operatorname{tg} C - c^m \log \operatorname{tg} B}{b^n e^{\operatorname{tg} C} - c^n e^{\operatorname{tg} B}} = \frac{b^{m-n} \cos B}{e^{\operatorname{tg} B}} \cdot \frac{m \cos^2 B \log \operatorname{tg} B - 1}{n \cos^3 B - \sin B}.$$

SERGIU PALI

Soluţia 1. Expresia din primul membru, notată cu E, pentru triunghiul isoscel $b=c$, deci şi $B=C$, ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Putem deci aplica următoarea regulă[1]).

Adevărata valoare a unei expresii

$$u = \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}, \tag{1}$$

care ia forma $\frac{0}{0}$ *pentru* $x=x_1$, $y=y_1$ *soluţii a ecuaţiei* $\psi(x,y)=0$, *este câtul determinanţilor funcţionali ai funcţiilor* $f(x,y)$, $\psi(x,y)$; $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *pentru* $x=x_1$, $y=y_1$, *adică*

$$E = \frac{D\,f,\psi)}{D\,(x_1,y_1)} : \frac{D\,(\varphi,\psi)}{D(x_1,y_1)}. \tag{1'}$$

In cazul nostru, variabile sunt c şi C, $x_1=b$, $y_1=B$, iar ecuaţia $\psi(x,y)=0$, este

$$c \sin B - b \sin C = 0. \tag{2}$$

Adevărata valoare a lui E, conform relaţiei (1'), este

$$E = \left[\begin{vmatrix} -m c^{m-1} \log \operatorname{tg} B & \frac{b^m}{\sin c \cos C} \\ \sin B & -b \sin C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -n c^{n-1} e^{\operatorname{tg} B} & \frac{b^n e^{\operatorname{tg} C}}{\cos^2 C} \\ \sin B & -b \cos C \end{vmatrix}\right]_{\substack{c=b \\ C=B}} = \frac{b^{m-1}}{e^{\operatorname{tg} B}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -m \log \operatorname{tg} B & \frac{b}{\sin B \cos B} \\ \sin B & -b \cos B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -n & \frac{b}{\cos^2 B} \\ \sin B & -b \cos B \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{b^{m-n}}{e^{\operatorname{tg} B}} \cdot \frac{m \cos B \log \operatorname{tg} B - \frac{1}{\cos B}}{n \cos B - \frac{\sin B}{\cos^2 B}} = \frac{b^{m-n} \cos B}{e^{\operatorname{tg} B}} \cdot \frac{m \cos^2 B \log \operatorname{tg} B - 1}{n \cos^3 B - \sin B},$$

ceea ce era de stabilit.

Soluţii date de d-nii: *Cândea Victor* (Lic Satu-Mare), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Virgil* (Lic Slatina), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Fleşeriu Eugen* (P., T), *Giurconiu Mihai* (P., T.), *Moldovan Mircea* (P, T.), *Puşcaşiu Silviu* (P., T.), şi *Stern Tiberiu* (P., T.).

Soluţia 2-a. Din teorema sinusurilor, avem $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$, valoare care înlocuită în primul membru, notat cu E, ne dă

$$E = \frac{b^m \log \operatorname{tg} C - \frac{b^m \sin^m C}{\sin^m B} \log \operatorname{tg} B}{b^n e^{\operatorname{tg} C} - \frac{b^n \sin^n C}{\sin^n B} e^{\operatorname{tg} B}} = b^{m-n} \sin^{n-m} B \cdot \frac{\sin^m B \log \operatorname{tg} C - \sin^m C \log \operatorname{tg} B}{\sin^n B \cdot e^{\operatorname{tg} C} - \sin^n C\, e^{\operatorname{tg} B}}. \tag{1}$$

Pentru triunghiul isoscel având $\sphericalangle C = \sphericalangle B$, fracţia din ultimul membru ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ şi atunci aplicăm regula lui *L'Hôspital*, avem

---

[1]) *V. Alaci:* Curs de Analiză Matematică.

$$E = b^{m-n} \cdot \sin^{n-m} B \cdot \left[\frac{\sin^m B \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} C} \cdot \frac{1}{\cos^2 C} - m \sin^{m-1} C \cos C \log \operatorname{tg} B}{\sin^n B \cdot e^{\operatorname{tg} C} \cdot \frac{1}{\cos^2 C} - n \sin^{n-1} C \cos C \cdot \operatorname{tg} B} \right]_{C=B}$$

$$= b^{m-n} \sin^{n-m} B \cdot \frac{\sin^{m-1} B \cos^2 B (1 - m \cos^2 B \log \operatorname{tg} B)}{\sin^{n-1} B \cos B (\sin B - n \cos^3 B) e^{\operatorname{tg} B}} = \frac{b^{m-n} \cos B}{e^{\operatorname{tg} B}} \cdot \frac{m \cos^2 B \log \operatorname{tg} B - 1}{n \cos^3 B - \sin B}.$$

Astfel este stabilită relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Bâlă C-tin* (Lic. Tg.-Jiu), *Constantinescu Paul* (Col. N. Filipescu), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Corduneanu C-tin* (Col. N. Filipescu), *Diaconu Vasile* (Col N. Filipescu), *Gherlan Vasile* (Lic. Beiuş), *Haret Radu* (Bucureşti), *Moldovan Mircea* (P., T), *Munteanu Ioan* (Col. N. Filipescu), *Novac Ioan* (P, T.), *Târcomnicu C.* (Lic. Slatina), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti) şi *Tincu C-tin* (P, T.).

PROBLEME PROPUSE

2529. — Să se rezolve în numere întregi sistemul

$$\begin{cases} \Sigma x^2 y z - \Sigma x y = 269 \\ \Sigma x^3 y^3 - \Sigma x^2 y^2 = 4230 \\ x y z = 30 \end{cases}$$

SERGIU PALI

2530. — Să se studieze şi să reprezinte grafic funcţia

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}.$$

EUGEN VISA

2531. — Să se stabilească identitatea

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{2x + k(1 - x^2)}{1 - x^2 - 2kx} - 2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} k.$$

V. ALACI

2532. — In triunghiul ABC se notează cu M mijlocul laturei BC, cu A' şi A_1 picioarele bisectoarei AA' şi al înălţimei AA_1 şi cu A_2 punctul de tangenţă al laturei BC cu cercul înscris I. Să se demonstreze că,

$$\overline{MA'} \cdot \overline{MA_1} = \overline{MA_2}^2.$$

G-L GH. BUICLIU

2533. — Fie fascicolele de cercuri

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0, \quad \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 = 0,$$

unde

$$C_i \equiv x^2 + y^2 + 2a_i x + 2b_i y + C_i, \quad (i = 1,2,3,4).$$

Să se determine condiţia pentru ca cele două fascicole să aibă un cerc comun şi să se scrie ecuaţia acestui cerc.

ANDREI DOBRESCU

2534. — Se consideră punctele: $M(x_0, y_0, z_0)$, $A(a_1, b_1, c_1)$, $B(a_2, b_2, c_2)$, $C(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $D(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, ne situate în acelaşi plan. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei de intersecţie dintre planele MAB şi MCD Să se scrie rezultatul cu ajutorul determinanţilor.

GH. TH. GHEORGHIU

2535. — Să se arate că în triunghiul în care

$$\sin\left(\frac{B}{2} + C\right) - \sin C \cos \frac{B}{2} = 1,$$

avem relaţia

$$\frac{\sin 2C}{4c} = \frac{\cos \frac{B}{2}}{b}.$$

H. I. TEIUSAN

2536, — Intr'un triunghiu sferic dreptunghiu avem

$$\frac{sp\, b}{sp\, B} = \frac{1 + \sin c \operatorname{cotg} b}{1 + \operatorname{cotg} b},$$

$$\frac{\sin B}{sp \frac{B}{2}} = 1 + \frac{\sin b + \sin c \cos b}{\sin a}.$$

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Cârciu Ioan (2424, 2435, 2473, 2474); *Hurezeanu Romulus* (1370, 2052, 2071, 2094, 2407, 2420, 2458, 2466, 2485, 2512, 2515, 2519); *Ioncu Simion* (2370, 2492, 2493, 2497, 2499, 2513, 2519); *Ionescu-Ţiu* (N; P.). *Marinescu D.* (2293, 2423, 2493, 2506, 2513, 2519); *Mărcuţiu Silviu* (P; 2411, 2488, 2492, 2505, 2513, 2514, 2515, 2519); *Moldovan Mircea* (2493, 2497, 2499, 2508, 2509, 2513); *Moroianu Aurel* (2508, 2509); *Neguţ Ion* (N; P; 2407, 2416, 2499, 2512, 2515, 2519); *Novac Ioan* (2505, 2506, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2519, 2522, 2523, 2524); *Pisanca Ionel* (P; 2004, 2411, 2427, 2505, 2506, 2512, 2513, 2515); *Pantea Alexandru* (2050, 2375, 2383, 2387, 2509, 2519); *Păsărin Gh.* (2499, 2505, 2520); *Petanca Dacia* (2452, 2492); *Ristea Gheorghe* (2428, 2448, 2492, 2508); *Stănilă S.* (2247, 2271, 2293, 2383, 2452, 2460; 2469, 2509); *Tarcea Ioan* (2383, 2411, 2488, 2492, 2497, 2499, 2505, 2515, 2519); *Teodorescu Petre* (P; 2320, 2478, 2503, 2512, 2513, 2514, 2517, 2519, 2523, 2528).

INFORMAŢIUNI

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, pentru a fi luate în consideraţie, trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Rugăm pe corespondenţii noştrii ca problemele propuse pe care le trimet la „R. M. T.", să fie însoţite de soluţiile corespunzătoare.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el. şi s'o iscălească.

Se atrage atenţia abonaţilor că începând cu numărul 6 nu li se mai trimet revista dacă nu au plătit integral costul abonamentului.
Trimiţând banii prin CEC nu cheltuiţi decât 5000 lei pentru formular. Pentru CEC se poate depune banii la orice oficiu poştal din ţară.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

ANUL XXVII. AUGUST 1947 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREŢUL ABONAMENTULUI ESTE 330.000 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ŞI 700 000 LEI PENŢRU INSTITUŢII
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 800 000 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **GH. TH. GHEORGHIU**: ARTICOL DE METODOLOGIE.
2. NOTE MATEMATICE 13, 14.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 50, 1516, 1750, 1754, 1949, 1996, 2131, 2178, 2333, 2424.
5. PROBLEME PROPUSE: 2537 - 2545.
6. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu deosebită plăcere anunţăm că înc. până dela 15 August 1947 mai face parte dintre membrii „R. M. T." şi distinsul profesor PETRE MIRESCU, Secretar General al Ministerului Educaţiei Naţionale.

Mulţumim D-lui L-t C-dor COSTĂCHESCU V. C. pentru contribuţia benevolă de 500.000 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Începând cu data de 15 August, costul abonamentului pe anul în curs este de 330.000 lei pentru particulari, şi de 700.000 pentru instituţii. În această sumă intră şi expediţia revistei.

2. Abonaţii vechi, adică cei care s'au înscris ca abonaţi înainte de această dată, nu vor plăti decât 150.000 lei (iuclusiv expediţia). Cei care nu au plătit această sumă până la 15 August, li s'a oprit trimiterea revistei. Pe pag. 3-a şi a 4-a a copertei s'a publicat un tablou de sumele ce datoresc aceşti abonaţi. Rugăm pe cunoscuţii lor să le comunice că în caz că nu achită până la 15 Septembrie sumele datorate, vor intra şi ei în majorarea de mai sus.

3. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 300.000 lei pentru membrii noi, şi de 120.000 lei pentru membrii vechi, rugându-i *insistent* să trimeată această sumă pună la 15 Septembrie, văzându-ne obligaţi ca peste această dată să mărim la toată lumea această taxă.

4. Volumele I, XXIII, XXV şi XXVI sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 400.000 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50.000 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 30.000 lei pentru recomandat, câte 20.000 lei pentru fiecare volum.

5. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 40.000 lei + 3.000 lei expediţia.

6. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

5. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Harry Truman, Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

6. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — No. 6 TIMISOARA, AUGUST 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 330.000 lei pentru particulari și 700.000 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.

ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Harry Truman No. 1.

ARTICOL DE METODOLOGIE

DE

GH. TH. GHEORGHIU.

De obiceiu, articolelor care sunt publicate în cele două reviste ale noastre cu apariție lunară, li se cer *originalitate*. Cu alte cuvinte proprietățile ce se stabilesc în interiorul lor, oricât de modeste ar fi ele, să prezinte o noutate.

Articolului ce formează rândurile de față, îi lipsește această latură. El strânge la un loc câteva observări pedagogice pe care le-am întâlnit în clasă cu studenții mei, sau le-am remarcat citind unele cărți de matematici elementare. Care dintre profesorii noștri, de orice rang ar fi ei, nu au asemenea observări? Și ce păcat că tot acest material didactic nu este consemnat undeva! Ași fi fericit dacă după acest articol ar urma și altele, iscălite de alți colegi de-ai mei, și care să consemneze truda lor de a se face mai ușor înțeleși de cei care-i ascultă; sau poate unele observări metodice asupra unor greșeli ce se fac deobiceiu și care ne fiind semnalate, sunt continuate din generație în generație, de tineri; sau poate un exemplu mai simplu care să ilustreze mai bine o teoremă, ș. a. m. d. Ce material bogat s'ar strânge și ce folositor ar fi pentru întocmirea cărților de liceu.

Eu personal am mai scris un asemenea articol intitulat *„Asupra studiului variației unei funcțiuni"*, în *Gazeta Matematică*, vol. 45, pag. 181, în care am strâns șapte exemple pe care arătam cu câtă atenție trebue să caute cineva intervalul de variație al unei funcțiuni, întâlnind cu această ocazie un exemplu nou de funcțiune al cărei grafic are un punct singular izolat. În aceiași revistă, am publicat notele 7 și 8 din vol. 47, intitulate *„Criteriul lui Prigsheim"*, unde cu ajutorul unui exemplu simplu, dar intuitiv, arătam esența acestui criteriu.

Deasemeni în revista noastră, vol. 25, pag. 111 am scris un articol intitulat *„Asupra teoremei lui Thales"* în care arătam că teorema lui *Thales* este o consecință logică a raportului anarmonic. Considerațiunile făcute acolo nu erau o demonstrație efectivă a acestei teoreme, ci arătau mai mult natura ei.

Înainte de a începe articolul, vreau dela început să subliniez că în rândurile ce vor urma, nu mă refer la nimeni și nu urmăresc să corectez pe nimeni. Urmăresc numai latura bună a lucrului: ca cititorii acestei reviste, mai ales elevii de liceu și studenții, să evite în viitor greșelile menționate și totodată să-și formeze un spirit critic propriu care să le dea posibilitatea de a învăța mai cu atenție teoremele și de a preciza mai mult condițiile în care o teoremă se poate aplica sau nu.

1. O scăpare din vedere care se întâlnește des la rezolvarea ecuațiilor trigonometrice. Să presupunem că avem de rezolvat ecuația simplă

$$2\cos x = 1.$$

Cum o soluție particulară a ei este $x=60^0$, soluția generală este dată de formula $x = 2k\pi \pm 60^0$. Această scriere este greșită! Nu se poate folosi într'o formulă două unități de măsură: *gradul* și *radianul*. Formula scrisă corect este $x=2k\pi \pm \frac{1}{3}\pi$ sau $x = 360^0 k \pm 60^0$. Sigur că scriind în prima formă nu am făcut o greșeală de fond ci una de formă. Am putea spune că este o greșeală asemănătoare unei greșeli de ortografie într'o scriere corectă!

2. Într'o carte care se adresează începătorilor, se introduc numerele complexe în felul următor: *Se numește număr complex, un număr de forma* $a+bi$, *unde* a *și* b *sunt numere reale, iar* $i=\sqrt{-1}$; *făcând* $b=0$, *numărul complex se reduce la numărul real* a, *deci numerele complexe conțin numerele*

reale ca un caz particular... Ce poate fi mai confuz decât această definiție pentru cineva care este obișnuit să lucreze numai cu numerele reale ale căror proprietăți au fost definite ca o extindere logică a proprietăților numerelor aritmetice? Să analizăm puțin definiția de mai sus, așa cum ar face o un profan când ar citi-o pentru prima dată. 1°. Ce sens are $\sqrt{-1}$, când semnul radical definește o operație precisă în aritmetică, și este purtată numai asupra numerelor aritmetice (numere reale comensurabile pozitive)? Acest sens nu poate avea loc deci în câmpul numerelor obișnuite, adică i este un simbol nou. 2°. Dacă este așa, ce semn este între b și i in expresia lui bi? Semnul înmulțirei pe care îl folosim în algebră? Dacă este așa, cum facem această operație între numărul real b și simbolul i, ale cărui operații nu le cunoaștem? Probabil că autorul așa a înțeles, deoarece mai departe spune că $0.i=0$. Care este cauza acestei afirmări, deoarece noi știm numai că zero înmulțit cu orice număr real face tot zero! Această proprietate se extinde și la alte simboluri? Dacă este așa, dece și $0.\infty$ nu face tot zero, căci ∞ este tot un simbol! 3° Ce rost are $+$ între numerele a și bi care nu se pot aduna după regula obișnuită, fiind numere de natură deosibită? Iată o sumă de întrebări care nu-și pot găsi răspunsul într'o minte care-i obișnuită să lucreze numai cu numerele reale! Și totuși începe să lucreze cu aceste numere, fără să le înțeleagă. Ne mai mirăm că în mintea unui asemenea om se formează un haos? Eu nu mă mir căci și eu am pățit la fel pe vremuri și nu m'am lămurit decât mai târziu când mi-am dat seama că operațiile de mai sus au un *sens vectorial*, iar nu un *sens algebric* așa cum îl bănuisem eu la început.

Să-mi fie permis ca să lămuresc cititorul, căruia nu i-a căzut în mână o carte mai modernă de algebră, cum trebuesc introduse în mod corect numerele complexe.

Se numește număr complex, un simbol compus din două numere reale a, b într'o ordine anumită; vom nota un asemenea număr prin (a, b). Pentru a putea lucra cu aceste numere noui, avem nevoie să le impunem anumite definiții [1].

[1]) Să se observe pas cu pas, cum toate proprietățile noui ale numerelor complexe le sprijinim pe proprietățile cunoscute ale numerelor reale.

I. Prin definiție, prin numărul complex particular $(a, 0)$ vom înțelege numărul real a. În particular $(0, 0)=0$.

II. Prin definiție vom spune că două numere complexe (a, b), (c, d) sunt *egale*, lucru pe care-l vom reprezenta simbolic prin

$$(a, b)=(c, d),$$

atunci când $a=c$ și $b=d$.

III. Prin definiție, vom numi *suma* a doua numere complexe (a, b), (c, d), numărul complex $(a+c, b+d)$; această operație o vom reprezenta simbolic prin

$$(1) \qquad (a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$

folosirea în prima parte a semnului $+$ având numai o reprezentare simbolică, pe când în partea dreaptă fiind între numere reale și are un sens efectiv de adunare. În particular, în baza lui (1) și I., avem

$$(a, 0)+(c, 0)=(a+c, 0) \quad \therefore \quad a+c=a+c,$$

în prima parte $+$ reprezentând operația definită prin (1), iar în partea dreaptă operația adunărei algebrice. Adunarea numerelor complexe este deci o extindere la aceste numere a adunărei algebrice.

Această operație, astfel introdusă, se bucură de proprietățile adunărei algebrice. În adevăr, în baza comutativității adunărei numerelor reale $a+c=c+a$, $b+d=d+b$ și deci în baza lui II,

$$(a+c, b+d)=(c+a, d+b),$$

și conform lui (1), citită invers,

$$(c+a, d+b)=(c, d)+(a, b),$$

adică îndefinitiv

$$(a, b)+(c, d)=(c, d)+(a, b),$$

adică *adunarea numerelor complexe este comutativă*. Este și *asociativă*, adică

$$[(a, b)+(c, d)]+(e, f)=(a, b)+[(c, d)+(e, f)]$$

deoarece

$$[(a, b)+(c, d]+(e, f)=(a+c, b+d)+(e, f)$$
$$=((a+c)+e, (b+d)+f)=(a+c+e, b+d+f),$$

$$[(a, b)+(c, d)]+(e, f)=(a, b)+(c+e, d+f)$$
$$=(a+(c+e), b+(d+f))=(a+c+e, b+d+f).$$

IV. Prin definiție, vom spune că *produsul* numărului complex (a, b) prin numărul real m este

numărul complex (ma, mb) operaţie pe care o vom traduce simbolic prin formula

$$m(a, b) = (ma, mb). \tag{2}$$

V. Mai general, prin definiţie, vom numi *produsul numerelor complexe* (a, b), (c, d) numărul complex $(ac-bd, ad+bc)$ şi vom scrie

$$(a, b).(c, d) = (ac-bd, ad+bc), \tag{3}$$

în prima parte semnul înmulţirei reprezentând în mod simbolic operaţia definită prin această egalitate. În particular,

$$(a, 0).(c, 0) = a.c = (ac, 0) = ac,$$

adică operaţia definită prin (3) este o extindere logică a înmulţirei dintre numerele reale. Formula (3) conţine deasemeni pe (2) deoarece cu ajutorul acesteia avem

$$m(a, b) = (m, 0).(a, b) = (ma, mb),$$

adică tocmai (2).

Cu ajutorul relaţiei (3) se poate demonstra că înmulţirea numerelor complexe este *comutativă, asociativă* şi *distributivă* (e bine să se facă acest lucru ca exerciţiu, după modelul dat mai sus la III).

Impărţirea numerelor complexe se defineşte ca operaţie inversă a înmulţirei.

Acestea sunt consideraţiunile ce trebuesc făcute pentruca numerele complexe să fie introduse în ştiinţă în mod corect. Pornind dela aceste consideraţiuni se poate ajunge acum la forma obişnuită a numerelor complexe. În adevăr, în baza lui (1) şi (2), avem

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + bi,$$

unde am notat pentru prescurtare $(0, 1) = i$. Acest simbol, în baza lui (3), se bucură de proprietatea

$$i.i = i^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Cu această scriere, relaţiile de definiţie (1), (2) şi (3) se scriu

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$

$$m(a+bi) = ma+mbi,$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i,$$

adică *cu numerele complexe $x+yi$ putem lucra ca şi cu numerele reale, în ceiace priveşte adunarea, înmulţirea şi împărţirea, având grija ca peste tot să înlocuim i^2 cu -1.*

3. Să-mi fie permis să dau un exemplu din care să se vadă la ce concluzii greşite suntem conduşi dacă confundăm operaţiile dintre numerele complexe cu cele dintre numerele reale. Avem

$$i^2 = i.i = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1,$$

rezultat absurd! Unde este greşala? În demonstraţia de mai sus am folosit regula

$$\sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{AB},$$

stabilită în algebră pentru numerele reale şi pozitive şi pentru radicalii aritmetici. *Această regulă nu este adevărată* dacă A, B sunt negativi (cel puţin unul) şi cu atât mai mult dacă sunt complexi!

Faptul că operaţiile cu numere complexe sunt asemănătoare operaţiilor cu numere reale ne tentează uneori să aplicăm reguli care numai sunt adevărate şi deci să ajungem la concluzii greşite. Se cere deci o atenţie specială în calculul cu numere complexe.

4. De câteori n'am folosit formula care dă derivata funcţiei

$$y = \sin x,$$

dar poate unii dintre noi niciodată nu ne-am întrebat în ce este exprimat arcul x. Ne propunem să arătăm că această formulă este valabilă numai în ipoteza că arcul este exprimat în radiani.

În adevăr, derivata funcţiei considerate este limita raportului

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \tag{4}$$

când Δx tinde către zero. Pentruca acest raport să aibă un sens, este necesar ca ambii termeni ai fracţiei din partea dreaptă să fie exprimaţi cu aceiaşi unitate de măsură. În trigonometrie *sinx* este un raport, raportul dintre ipotenuza şi cateta opusă unghiului x într'un triunghiu dreptunghiu. În algebră, *sinx* este considerat ca o lungime reprezentând ordonata unui punct depe cercul trigonometric, atunci când s'a luat drept unitate de măsură raza cercului. Pentruca fracţia (4) să aibă sens este deci necesar ca numitor Δx (lungimea arcului Δx) să fie exprimată luând ca unitate de măsură tot raza cercului, adică trebue să fie exprimat în radiani.

Chestiunea aceasta revine în fond la următoarea mai generală.

Fie $y = f(x)$ o funcțiune continuă și derivabilă. Pentru a-i face graficul se obișnuește să se aleagă două axe perpendiculare pe care se alege drept origină punctul lor comun, câte un sens, deobiceiu pe cea orizontală pe care măsurăm x-ii, la dreapta, iar pe acea verticală pe care măsurăm y-ii, în sus, și o unitate de măsură aceiași pe ambele axe. Să presupunem că luăm pe cele două axe unități de măsură diferite (lucru destul de frecvent în științele experimentale); graficul funcțiunei se va schimba. Întrebarea pe care ne-o punem este următoarea: coeficientul unghiular al tangentei mai este reprezentat prin derivata funcțiunei în acest punct? Pentru fixarea ideilor în facerea figurei să presupunem curba $y = f(x)$ crescătoare și fie două punte pe ea infinit vecine $M(x, y)$, $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$; prin M ducem o paralelă la Ox care taie o paralelă dusă prin M' la Oy în A. Tot prin M ducem o paralelă la Oy care taie pe Ox în P. Să presupunem că unitatea de măsură aleasă pe Ox este u, iar cea aleasă pe Oy este v. Aceasta înseamnă că $OP = x \,.\, u$ și $PM = y \,.\, v$.

Când M' vine de se confundă cu M, coarda MM' tinde către tangenta în M la curbă și deci coeficientul unghiular al tangentei este limita coeficientului unghiular al secantei MM', adică limita către care tinde expresia

$$\operatorname{tg} A\,MM' = \frac{M'A}{MA} = \frac{\Delta y \,.\, v}{\Delta x \,.\, u},$$

adică înfine $y'\left(\frac{v}{u}\right)$.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

13. — *Un exemplu de funcție derivabilă cu derivată discontinuă.*

Se știe că o funcție derivabilă într'un interval este continuă în acelaș interval. Se pune însă intrebarea, dacă nu cumva și derivata acestei funcțiuni este în mod necesar continuă? Răspunsul este negativ, după cum o vom dovedi printr'un exemplu.

Derivata funcției

$$y = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

se calculează foarte ușor, ea este

$$(1) \qquad y' = 2x \,.\, \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Funcțiunea $y'(x)$ este discontinuă pentru $x=0$, căci în vecinătatea originei termenul $2x \,.\, \sin\frac{1}{x}$ este mai mic decât orice număr pozitiv dat, iar $\cos\frac{1}{x}$ oscilează indefinit între $+1$ și -1. Așa dar, într'un interval ce cuprinde originea, ori cât de mic ar fi el, oscilația acestei funcțiuni nu este foarte mică.

Totuși, funcția primitivă este derivabilă în origine. Într'adevăr, valoarea derivatei funcțiunii $y = f(x)$ în origine este prin definiție

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

În cazul nostru $f(0) = 0$, deci

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim h \,.\, \sin\frac{1}{h} = 0.$$

Prin urmare valoarea derivatei funcțiunii noastre în origine este zero.

Faptul că n'am putut obține $y'(0)$ făcând pur și simplu $x = 0$ în expresia (1), se explică în felul următor: formula $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$, de care ne-am servit, este valabilă cu condiția ca atât u cât și v să fie derivabile. Ori, în cazul nostru $v = \sin\frac{1}{x}$ nu este derivabilă pentru $x = 0$, deci formula (1) nu este valabilă pentru un interval, ce cuprinde originea.

Așa dar, în rezumat, funcțiunea derivabilă în orice interval

$$y = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

admite drept derivată:

$$\begin{cases} y' = 0 & \text{pentru } x = 0 \\ y' = 2x \,.\, \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{pentru orice } x \neq 0 \end{cases}$$

și se constată ușor că y' este o funcție discontinuă în punctul $x = 0$

KAUFMANN IOSIF

---

14. — *Asupra formulei deviației compasului giroscopic, datorită vitezei și drumului navei.*

Un compas giroscopic are o serie de deviații

permanente sau accidentale (datorit latitudinei, ruliului şi tangajului, schimbărilor de drum, etc.)

Una din aceste deviaţii este datorită vitezei şi drumului navei. Presupunem un compas giroscopic în A (latitudine φ).

Dacă nava este stopată, axul giroscopic se va orienta după direcţia Nord adevărat-Sud adevărat (celelalte deviaţii se neglijează). Dacă nava merge într'un drum D_a cu viteza v, axul giroscopic se va orienta perpendicular pe rezultanta vectorilor $\overrightarrow{AC}=900\cos\varphi$ (în mile marine, datorit rotaţiei pământului) şi $\overrightarrow{AD}=v$ (în noduri). Unghiul δ poartă denumirea de deviaţie datorită vitezei şi drumului navei.

În ΔABB_1, aplicăm o teoremă cunoscută din „Trigonometria patratică“

$$BB_1=(BB_1+AC+CB_1)\,sp\,\delta$$

sau

$$sp\,\delta=\frac{v\sin D_a}{v(\sin D_a+\cos D_a)+900\cos\varphi}=$$

$$\frac{v\sin D_a\,sp\,D_a}{v\sin D_a+900\cos\varphi\,sp\,D_a}.$$

Formula este valabilă pentru drumurile 0^0-90^0. Formule analoage se pot uşor găsi şi pentru celelalte cadrane.

$D_g=D_a-\delta$.

D_g = drumul giroscopic, δ are semnul —, fiind la W de meridian. D_g este drumul ce se dă timonierului, sau pilotului, pentru a-l ţine la compas.

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, No. 11, Iulie 1947. Pe marginea unei note, de *P. P. Drăghicescu*. O problemă de mecanică, de *Alexandru Stoenescu*. Raport pentru decernarea premiului „*G. Ţiţeica*“, de *Şerban Gheorghiu, N. N. Mihaileanu, O. N. Ţino*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Boletin Matematico*, Anul XX, N-rile 2—3, Buenos-Aires. Dos teoremes de Geometria elemental y solo teorema de Geometria analitica, por *Bernardo I. Baidaff*. Probleme rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 50. — *Se dă o prismă* P *de lungime indefinită şi cu secţiunea triunghiulară. Fie un plan* Q, *care secţionează prizma după uu triunghiu* ABC *şi fie* R *un plan perpendicular pe* Q *şi care trece prin una din muchiile prizmei* P. *Se taie prizma* P *cu un plan* S, *perpendicular şi pe* Q *şi pe* R *şi fie* $A_1B_1C_1$ *triunghiul de secţiune. Să se demonstreze că dacă prin punctele* A_1, B_1, C_1 *se duc planele* T_1', T_1'', T_3''' *respectiv perpendiculare pe dreptele* BC, CA, AB *ele trec prin o dreaptă* Δ *şi invers, dacă prin punctele* A, B, C, *se duc planele* T', T'', T''' *respectiv perpendiculare pe dreptele* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, *ele trece printr'o altă dreaptă* Δ'. *Dreptele* Δ *şi* Δ' *pot fi concurente?*

MIHAI NICOLAU

Soluţie geometrică. Consider planul Q cu triunghiul ABC. Pe muchia ce trece prin C iau punctul C_1. Fie C' proecţia lui C_1 pe planul R, intersecţia planelor Q şi R fiind dreapta CC'. Planul S fiind perpendicular pe Q şi R, va fi perpendicular pe intersecţia lor CC'. Îl duc prin C'. El taie planul planul R după $C'C_1$, iar planul Q după o dreaptă D. Planele R, Q şi S fiind perpendiculare două câte două, dreptele lor de intersecţie CC', C_1C' şi D vor fi perpendiculare două câte două. Muchiile ce trec prin A şi B taie şi ele planul S în punctele A_1 şi B_1. Deoarece muchiile CC_1, AA_1, BB_1 sunt perpendiculare pe dreapta D, rezultă imediat că planele ce trec prin AA_1, respectiv BB_1 paralele cu planul R determină, analog cu triunghiul CC_1C' şi triunghiurile AA_1A', BB_1B' toate dreptunghice şi asemenea.

Planul T_1' fiind perpendicular pe BC din planul Q va fi perpendicular pe planul Q. Deci planele T_1', T_1'', T_1''' sunt 3 plane perpendiculare pe planul Q. E uşor de văzut că intersecţiile lor cu planul S sunt dreptele A_1A', B_1B'. C_1C', iar intersecţiile lor cu planul Q sunt trei drepte A'A'', B'B'', C'C'' perpendiculare din A', B', C' respectiv pe laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC. Dreptele A'A'', B'B'' şi C'C'' sunt concurente într'un punct O', ortopolul dreptei D faţă de triunghiul ABC. Deci

planele T_1', T_1'', T_1''' perpendiculare pe Q sunt concurente după dreapta Δ perpendiculară pe Q în O'.

În mod analog, A'A''', B'B''', C'C''' fiind intersecțiile planelor T', T'', T''' cu planul S, cele trei drepte sunt concurente într'un punct O, ortopolul dreptei D față de triunghiul $A_1B_1C_1$ și planele trec prin dreapta Δ' perpendiculare pe S în O.

Dreptele Δ și Δ' dacă sunt concurente, ele determină un plan perpendicular pe Q și pe S, deci și pe dreapta D. Dreapta OO' fiind în acest plan va trebui să fie perpendiculară pe dreapta D

Considerăm dreptunghiurile $AA'A_1A_2$, $BB'B_1B_2$, $CC'C_1C_2$, A_2, B_2 și C_2 fiind al patrulea vârf în fiecare. Aceste dreptunghiuri, situate în plane paralele și perpendiculare pe D sunt asemenea două câte două. Ducând diagonalele $A'A_2$, $B'B_2$ și $C'C_2$, din asemănare rezultă imediat egalitatea unghiurilor:

$$\sphericalangle A_1A'A_2 = \sphericalangle B_1B'B_2 = \sphericalangle C_1C'C_2,$$

rezultat din care deducem că planul V al triunghiului $A_2B_2C_2$ trece prin dreapta D.

Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt proecțiile triunghiului $A_2B_2C_2$ respectiv pe planele Q și S.

Să considerăm acum planele U', U'', U''' ale triunghiurilor OO'A', OO'B', OO'C', cari trec prin dreapta OO'.

Dreapta A'O' din planul Q este perpendiculară pe BC, proecția dreptei B_2C_2 pe acest plan. Deci B_2C_2 este perpendiculară pe A'O'. La fel demonstrăm că B_2C_2 este perpendiculară și pe A'O. Atunci B_2C_2 este perpendiculară pe planul U' determinat de A'O' și de A'O. Dreapta OO' fiind în planul U' va fi perpendiculară pe B_2C_2. În mod analog demonstrăm că OO' este perpendiculară pe C_2A_2 și pe A_2B_2, deci pe planul V al triunghiului $A_2B_2C_2$. Dreapta D fiind în acest plan, rezultă că OO' este perpendiculară pe D. Deci dreptele Δ și Δ' sunt totdeauna concurente.

Gh. S.

Soluție analitică. Pentru simplificarea calculelor alegem următorul sistem de referință: a) muchia prizmei ce trece prin A drept axă Oz; b) origina în A; c) muchia ce trece prin B să fie situată în planul xOz. Cu aceste alegeri coordonatele punctelor A, B, C vor fi de forma: $A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, c)$, $C(\alpha, \beta, \gamma)$, iar ecuația planului ABC va fi

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 0 & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0; \quad \beta c\, x + (a\gamma - \alpha c)\, y - a\beta = 0.$$

Planul R trebuind să treacă printr'o muchie a prizmei, fie Oz, va avea ecuația de forma: $y = mx$, parametrul m determinându-se prin condiția ca planul să fie perpendicular pe Q, adică prin relația

$$\beta c\, m - (a\gamma - \alpha c) = 0; \quad m = \frac{a\gamma - \alpha c}{\beta c}.$$

Planul S este definit numai ca direcție; pentru precizare să presupunem că trece prin punctul $A_1(0, 0, z_0)$, încât ecuația lui va fi de forma

$$Ax + By + C(z - z_0) = 0.$$

Coeficienții A, B, C se determină scriind că planul este perpendicular pe planele R și S, adică prin condițiile

$$\beta c\, A + (a\gamma - \alpha c)\, B - a\beta\, C = 0,$$
$$(a\gamma - \alpha c)\, A - \beta c\, B = 0;$$

eliminând pe A, B, C între aceste ecuații se găsește că ecuația planului S este

$$\begin{vmatrix} x & y & z - z_0 \\ \beta c & a\gamma - \alpha c & -a\beta \\ a\gamma - \alpha c & -\beta c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Coordooatele punctului B_1 se găsesc intersectând acest plan cu muchia ce trece prin B ale cărei ecuații sunt $x=a$, $y=0$, și se găsește

$$B_1\left[a,\ 0,\ z_0 - \frac{a^2\beta^2 c}{c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2}\right].$$

Analog,

$$C_1\left[\alpha,\ \beta,\ z_0 - \frac{a^2\beta^2\gamma}{c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2}\right].$$

Cum parametrii directori ai laturilor triunghiului ABC sunt $BC[\alpha - a, \beta, \gamma - c]$, $CA(\alpha, \beta, \gamma)$, $AB(a, 0, c)$, ecuațiile celor trei plane T_1', T_1'', T_1''', vor fi

$$(T_1') \equiv (\alpha - a)\, x + \beta y + (\gamma - c)(z - z_0) = 0,$$

$$(T_1'') \equiv \alpha(x - a) + \beta y + \gamma\left[z - z_0 + \frac{a^2\beta^2 c}{c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2}\right] = 0,$$

$$(T_1''') \equiv a(x - a) + c\left[z - z_0 + \frac{a^2\beta^2\gamma}{c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2}\right] = 0.$$

Cum între primele părți ale acestor trei ecuații există identitatea

$$(T_1'') - (T_1''') \equiv (T_1'),$$

însemnează că cele trei plane aparțin aceluiaș fascicol, adică trec toate printr'o aceiași dreaptă Δ

Analog se găsesc ecuațiile

$$(T') \equiv (\alpha - a)x + \beta y + \frac{a^2\beta^2(c-\gamma)}{c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2} z = 0,$$

$$(T'') \equiv \alpha(x-a) + \beta y - \frac{a^2\beta^2\gamma}{c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2}(z-c) = 0,$$

$$(T''') \equiv a(x-a) - \frac{a^2\beta^2 c}{c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2} = 0;$$

și cum avem identitatea

$$(T'') - (T''') \equiv (T')$$

însemnează că și aceste trei plane aparțin unui fascicol, adică trec toate trei printr'o aceiași dreaptă Δ'.

Dreptele Δ și Δ' sunt definite de câte două din ecuațiile de mai sus; de exemplu Δ prin $(T_1')=0$, $(T_1'')=0$ și Δ' prin $(T')=0$, $(T'')=0$. A scrie că dreptele Δ și Δ' sunt concurente, revine la a spune că planele $(T_1')=0$, $(T_1'')=0$, $(T')=0$, $(T'')=0$ au un punct comun. Acest fapt se traduce prin relația

$$\begin{vmatrix} \alpha-a & \beta & \gamma-c & -(\gamma-c)z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma & -a\alpha+\gamma(-z_0+a^2\beta^2 c\,k) \\ \alpha-a & \beta & a^2\beta^2 k(c-\gamma) & 0 \\ \alpha & \beta & -a^2\beta^2\gamma\,k & -a\alpha+a^2\beta^2 c\,\gamma\,k \end{vmatrix} = 0,$$

unde am pus pentru prescurtare

$$\frac{1}{k} = c^2\beta^2 + (a\gamma - \alpha c)^2.$$

Ori, scăzând în acest determinant linia 3-a din prima, iar a 4-a din a 2-a, elementele primelor două linii astfel obținute sunt proporționale. Deci, egalitatea precedentă are loc întotdeauna, adică *dreptele Δ și Δ' sunt întotdeauna concurente.*

Gh. Th. Gh

Problema 1516. — *Între diametrele a două cercuri concentrice există relația*

$$4d^2 = (2+\sqrt{3})D^2.$$

1°. *Care este poligonul regulat circumscris cercului de diametru d și înscris cercului de diametru* D.

2°. *Să se calculeze latura lui.*

S-LT I. C. SAVIN

Soluția. 1°. Fie n numărul laturilor poligonului și deci $360^0/n$ mărimea unghiului la centru. Dacă O este centrul comun cercurilor, AB latura poligonului înscris în cercul de diametru $D=2R$ și tangentă în T la cercul de diametru $d=2r$, din triunghiul dreptunghiu ATO scoatem

$$AB = 2AT = R\sin\frac{180^0}{n} = r\,\mathrm{tg}\frac{180^0}{n}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{180^0}{n} = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}.$$

Dar din relația dată scoatem

$$\frac{d^2}{D^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{8},$$

încât

$$\cos\frac{180^0}{n} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos 15^0,$$

adică $n=12$. Poligonul căutat are deci *12 laturi.*

2° Se știe că latura poligonului cu 12 laturi înscris într'un cerc este

$$l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

Soluție dată de d-nii: *Anastasescu M., Apostol R., Bakonyi C., Enăchescu I., Florescu V., Jidanu C., Matei D., Modâlcă S., Nedelcu N. N., Negrea A. Mircea, Negulescu Șt. D., Nistorescu Dan, Petrescu P. Benone, M. Petrescu, Rădulescu Oct. Gh., Rusu L. Mircea, Săruleșteanu Em. I., Ștefănescu N. D, Tilică Șt. C., Viciu A. A., Wegener Eug.* și *Zagaican Ilie.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1750. — *Să se stabilească inegalitățile*

$$1 + \sin^2 a \sin^2 b + \sin^2 b \sin^2 c + \sin^2 c \sin^2 a \geqq \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c,$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a \sin^2 b \geqq \cos^2 a \cos^2 c + \sin^2 b \sin^2 c,$$

oricare ar fi a, b, c.

LT. C-DOR C. IONESCU-ȚIU

Soluție. Prima inegalitate se poate scrie sub forma

$$(1-\sin^2 a)(1-\sin^2 b)(1-\sin^2 c) + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \geqq 0$$

sau

$$\cos^2 a \cos^2 b (1-\sin^2 c) + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \geqq 0$$

inegalitate evidentă fiind suma a două pătrate. Pentru a avea egalitate este suficient ca unul din arcele a, b, c să fie de forma $2k\pi$, iar altul de forma $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$, unde k este ca de obiceiu un număr întreg.

Pentru a doua inegalitate transformăm totul în sinusuri; avem

$$\sin^2 c(1-\sin^2 a-\sin^2 b)+\sin^2 a\sin^2 b \geqq 0,$$

sau

$$\sin^2 c(1-\sin^2 a)(1-\sin^2 b)+\sin^2 a\sin^2 b(1-\sin^2 c)\geq 0;$$

$$\sin^2 c\cos^2 a\cos^2 b+\sin^2 a\sin^2 c\cos^2 c\geq 0$$

inegalitate evidentă. Pentru egalitate trebue să avem

a sau $b=2k\pi=c$ şi totaşa a sau $b=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=c$.

Observare. D-nii *D. Venter* şi *E. Wegener* au demonstrat numai prima inegalitate.

Gh. Th. Gh.

Problema 1754. — *În triunghiul* ABC, *perpendicularele în* A *pe* AC *şi în* B *pe* AB *se întâlnesc în* B'. *Analog se obţine* C'. *Să se arate că:*

1°. *Punctele* B', C' *sunt simetrice faţă de centrul* O *al cercului circumscris triunghiului* ABC.

2°. *Dreapta* B'C' *trece prin intersecţia lui* BC *cu tangenta în* A *la cercul* ABC.

N. N. MIHAILEANU

Soluţia. 1°. Fie A' punctul de intersecţie al dreptelor BB', CC'. Cum unghiurile ABA' şi ACA' sunt drepte, patrulaterul ABA'C este inscriptibil, adică A' este pe cercul ABC şi AA' este diametru în acest cerc. Pe de altă parte, patrulaterul AB'A'C' este paralelogram, având laturile opuse paralele două câte două, ca fiind perpendiculare pe laturile AB, AC. Diagonalele trebuind să se taie în două părţi egale, şi cum AA' este diametru, centrul cercului ABC se va afla la mijlocul lui B'C', adică B' şi C' sunt simetrice faţă de acest punct.

2° Fie E punctul unde BC taie pe B'C'. Aplicând teorema lui *Menelaus* în triunghiul A'BC tăiat de transversala B'C', avem

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'A'}}\cdot\frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'B}}=1;\qquad \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{B'B}}{\overline{C'C}}\cdot\frac{\overline{C'A'}}{\overline{B'A'}}\cdot$$

Dar triunghiurile dreptunghice ABB' şi ACC' sunt asemenea, având laturile ce concură în A perpendiculare două câte două; din asemănarea lor scoatem

$$\frac{\overline{B'B}}{\overline{C'C}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},\qquad \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{B'A'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot$$

încât

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}^2}\cdot$$

Această relaţie spune că EA este tangenta în A la cercul ABC (F. G. M., Exercices de Géométrie, ed. 7-a, pr. 2339).

Au demonstrat numai prima parte a problemei, d-nii: *Drăgilă Pavel*, *Segal Zigu*, *Venter Dumitru* şi *Tilică Ştefan*.

D-nii *Andrievici N*, *Cazanacli V. Petre*, *Goga Florian*, *Mihoc N. Ovidiu* şi *Mureşan I. Octavian* au rezolvat problema pe cale analltică.

Gh. Th. Gh.

Problema 1949. — *Să se rezolve sistemul*

$$\sqrt{\frac{x-2}{10-x}}+\sqrt{\frac{y+2}{y-10}}=3,$$

$$\sqrt{x+y-\sqrt{x+y-4}}=4.$$

SAVEL ŢARALUNGA

Soluţia. Ridicând a doua ecuaţie la pătrat, obţinem

$$-\sqrt{x+y-4}=16-(x+y),$$

care printr'o nouă ridicare la pătrat dă ecuaţia raţională

$$(x+y)^2-33(x+y)+260=0,$$

de unde scoatem: $x+y=20$ şi $x+y=13$. Cea de-a doua soluţie nu verifică ecuaţia iniţială încât ne rămâne numai prima. Înlocuind în prima ecuaţie din enunţ pe y prin $20-x$, găsim

$$(1)\qquad \sqrt{x-2}+\sqrt{22-x}=3\sqrt{10-x}.$$

Prin ridicare la pătrat, găsim

$$2\sqrt{(x-2)(22-x)}=70-9x$$

care, printr'o nouă ridicare la pătrat conduce la ecuaţia

$$85x^2-1356x+5076=0$$

care are două rădăcini şi dintre cari numai $x=6$ verifică ecuaţia (1). Soluţia sistemului este deci $x=6$, $y=14$.

Soluţie dată de d-ra *Popescu Maria* (Bucureşti) şi de d-nii *Anton I.* (Beiuş), *Bakonyi C.* (Timişoara), *Dehelean Gh.* (Timişoara), *Ghimuş A. D.*, (Bucureşti), *Grozescu L.* (Beiuş), *Iosifescu C.* (Piatra Neamţ), *Luca I.* (Timişoara), *Mahren-*

holz J. (Germania), *Pali S.* (Timişoara), *Popescu I. A.* (Timişoara), *Şipoş I. E.* (Timişoara), *Tincu C. C.* (Timişoara), *Wegener E.* (Bucureşti),

Gh. Th. Gh.

Problema 1996. — *Să se rezolve sistemul*

$$\frac{x-a}{x+a}+\frac{y-b}{y+b}=c, \qquad \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}+\frac{y^2-b^2}{y^2+b^2}=d,$$

I. STAMATE

Soluţia. Făcând substituţiile

$$(1)\ u=\frac{a}{x+a},\ v=\frac{b}{y+b},\ \frac{1}{2}(2-c)=C,\ \frac{1}{2}(2-d)=D,$$

sistemul dat se reduce la

$$(2)\quad u+v=C,\ \frac{u^2}{(1-u)^2+u^2}+\frac{v^2}{(1-v)^2+v^2}=D.$$

Prin ridicare la pătrat, prima ecuaţie dă

$$u^2+v^2=C^2-2uv;$$

aducând la acelaşi numitor în a doua ecuaţie, ţinându-se seamă de această relaţie şi de prima din (2), obţinem ecuaţia

$$(3)\quad 4(D-1)u^2v^2-2(2CD-C-1)uv+$$
$$D(C-1)^2+C^2(D-1)=0.$$

Această ecuaţie dă două soluţii $uv=A_i$ $(i=1,2)$, încât rezolvarea sistemului dat se reduce la rezolvarea sistemelor cunoscute

$$u+v=C,\quad uv=A_i \qquad (i=1,2).$$

Aceste sisteme dau două grupe de valori (u_i, v_i) $(i=1,2)$ şi ţinând seamă de substituţia (1), făcută la început, vom avea două grupe de soluţii (x_i, y_i) $(i=1,2)$.

Au rezolvat bine problema, d-nii: *Bakonyi C. C.* (Timişoara), *Enăchescu I. Gr.* (Timişoara) şi *Wegener Eug.* (Bucureşti).

Problema 2131. — *Dintre soluţiile întregi ale ecuaţiei*

$$z^2=x^2+y^2$$

să se aleagă acelea pentru care suma $x+y+z$ *este un patrat perfect.*

G-L GH. BUICLIU

Soluţia. Soluţiile înregi ale ecuaţiei din enunţ sunt

$$z=u^2+v^2;\quad x=u^2-v^2;\quad y=2uv.$$

Problema revine la a determina pe u şi v astfel încât suma

$$S=x+y+z=2u(u+v)$$

să fie pătrat perfect. Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor u şi v. Avem

$$u=\alpha d;\quad v=\beta d;\quad S=2d^2\alpha(\alpha+\beta),$$

unde α şi β sunt prime între ele, din această cauză α şi $\alpha+\beta$ nu au divizori comuni. În aceste condiţiuni, pentru ca S să fie pătrat perfect, este necesar şi suficient ca

$$\alpha=2^n p^2,\quad \alpha+\beta=2^m q^2 \quad \text{cu} \quad m+n=2^t+1$$

$$\therefore \qquad S=2^{2t+2}d^2p^2q^2,$$

iar x, y, z sunt daţi de formulele

$$x=d^2(\alpha^2-\beta^2)=d^2[2^{2n}p^4-(2^{2t-n+1}q^2-2^n p^2)^2],$$

$$y=2d^2\alpha\beta=2^{2n+1}d^2p^2[2^{2t-2n+1}q^2-p^2],$$

$$z=d^2(\alpha^2+\beta^2)=d^2[2^{2n}p^4+(2^{2t-n+1}q^2-2^n p^2)^2].$$

Numerele p şi q sunt prime între ele, iar d, t, n oarecare.

La această problemă s-au primit soluţii de la 14 rezolvitori. Toţi s'au limitat la a da câteva exemple numerice, fără a căuta forma generală a soluţiilor. Singur d-l *Eug. Wegener* a făcut o incercare parţială considerând că pentru ca $u(u+v)$ să fie patrat ar trebui ca $u=2p$ sau $u+v=2p$. Se vede că soluţia e mai puţin simplă.

Gh. B.

Problema 2178. — *Să se găsească numărul întreg n astfel în cât două din numerele* n *şi* $2n\pm1$ *să fie patrate perfecte.*

G-L GH. BUICLIU

Soluţia. Problema revine la a rezolva în numere întregi, următoarele sisteme de ecuaţii

$$(I)\ x=x^2,\ 2x^2+1=y^2, \qquad (II)\ n=x^2,\ 2x^2-1=y^2,$$
$$(III)\ 2n+1=x^2,\ 2n-1=y^2.$$

(I) Soluţiile întregi ale ecuaţiei a doua a sistemului sunt date de

$$y=\frac{(1+\sqrt{2})^{2m}+(1-\sqrt{2})^{2m}}{2}$$
$$=\frac{(3+2\sqrt{2})^m+(3-2\sqrt{2})^m}{2},$$

$$x=\frac{(1+\sqrt{2})^{2m}-(1-\sqrt{2})^{2m}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(3+2\sqrt{2})^{m}-(3-2\sqrt{2})^{m}}{2\sqrt{2}}.$$

m fiind un număr întreg pozitiv. Avem o infinitate de soluţii pentru cazul (I). Exemple

$m=0;\quad n=x^2=0\qquad 2n+1=y^2=1^2$

$m=1;\qquad n=2^2\qquad 2n+1=2.2^2+1=3^2$

$m=2;\qquad n=12^2\qquad 2n+1=2.12^2+1=17^2$

$m=3;\qquad n=70^2\qquad 2n+1=2.70^2+1=99^2$

$m=4;\qquad n=408^2\qquad 2n+1=2.408^2+1=577^2$

. . . . . .

(II). Pentru acest caz soluţiile întregi sunt date de

$$x=\frac{(1+\sqrt{2})^{2m+1}-(1-\sqrt{2})^{2m+1}}{2\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{(1+\sqrt{2})^{2m+1}+(1-\sqrt{2})^{2m+1}}{2}.$$

De asemeni o infinitate de soluţii. Exemplu

$m=0,\quad n=x^2=1,\qquad 2n-1=y^2=1,$

$m=1,\qquad n=5^2,\qquad 2n-1=2.5^2-1=7^2$

. . . . . .

(III). Sistemul (III) prin scădere conduce la

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=2.$$

imposibil în numere întregi.

Soluţia aceasta a fost dată de d-l *Mahrenholz J.* Niciuna din celelalte soluţiuni primite nu este acceptabilă.

Problema 2383. — *În triunghiul dreptunghic* BAC *picioarele înălţimei şi bisectoarei din* A *pe* BC, *sunt respectiv* D *şi* E. *Fie* D_1 *şi* E_1 *proecţiile acestora pe* AB.

1°. *Să se calculeze suprafaţa trapezului* DD_1E_1E *în funcţie de laturile triunghiului* ABC.

2°. *Să se arate că,*

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EB}^2}{\overline{EC}^2}.$$

C-PT. G. P. BOERESCU

Soluţie. Construim figura şi ţinem seamă de notaţiile obicinuite.

1°. În triunghiul ABC, AD fiind înălţimea din vârful unghiului drept, avem

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}\,.\,\overline{DB},\quad \text{deci}\quad (1)\ \overline{DB}=\frac{c^2}{a}.$$

Din triunghiurile asemenea BDD_1, BAC deducem

$$\frac{\overline{DD_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

şi ţinând seamă de (1), scoatem,

$$(2)\qquad \overline{DD_1}=\frac{b\,c^2}{a^2}.$$

Apoi, teorema bisectoarei, aplicată in triunghiul ABC, ne dă,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}+\overline{CE}}{\overline{AB}+\overline{AC}}=\frac{a}{b+c},$$

deci,

$$(3)\qquad BE=\frac{a\,c}{b+c}.$$

Fiindcă triunghiurlle BEE_1, BCA sunt asemenea, avem

$$\frac{\overline{EE_1}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$$

şi ţinând seamă de (2), scoatem

$$(4)\qquad \overline{EE_1}=\frac{b\,.\,ac}{a(b+c)}=\frac{bc}{b+c}.$$

Din asemănarea triunghiurilor BDD_1, BCA şi BEE_1, BCA deducem, ţinând seamă de (2) şi (4),

$$\overline{BD_1}=\frac{\overline{DD_1}\,.\,\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{b\,c^2.c}{a^2b}=\frac{c^3}{a^2},$$

$$\overline{BE_1}=\frac{\overline{E_1E}\,.\,\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{bc\,.\,c}{a(b+c)}=\frac{c^2}{b+c},$$

deci

$$(5)\qquad \overline{E_1D_1}=\overline{BE_1}-\overline{BD_1}=\frac{c^2}{b+c}-\frac{c^3}{a^2}=$$

$$\frac{c^2(a^2-bc-c^2)}{a^2(b+c)}=\frac{bc^2(b-c)}{a^2(b+c)}.$$

Formule (2), (4) şi (5) ne dau bazele şi înălţimea trapezului DD_1E_1E, astfel că suprafaţa S a lui, este

$$S=\frac{\overline{DD_1}+\overline{EE_1}}{2}\cdot\overline{E_1D_1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{bc^2}{a^2}+\frac{bc}{b+c}\right)\cdot\frac{bc^2(b-c)}{a^2(b+c)},$$

sau,

$$S=\frac{b^2c^3(b-c)(a^2+bc+c^2)}{2a^4(b+c)^2}.$$

2°. Formula (1) şi analoaga ei $\overline{DC}=\frac{b_2}{a}$, împărţite, ne dau

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{c^2}{b^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}. \tag{6}$$

Ţinând seamă că AE este bisectoarea unghiului A, avem

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}},$$

astfel că (6) devine,

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{EB}^2}{\overline{EC}^2},$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Beşchea Radu* (P. B.), *Birănas Ioan* (P. T.), *Bogza Mihai* (Lic. Roman), *Brasch Andrei* (P. T.), *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Crăciunescu Victor*, *Dobrişan Alexandru* (P. T.), *Domilescu Eugen* (P. T.), *Ellmann M.* (P. T.), *Frunză Radu* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Goldiş Gh.* (P. T.), *Grigore A. Gh.* (student), *Macavei Eugen* (P. T.), *Manolescu G.* (P. T.), *Mărcuţiu Silviu* (P. T), *Novac Ioan* (P. T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Rohrlich Alfred* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T.), *Srager Adrian* (P. T.), *Stern Tiberiu* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti) şi *Tincu C-tin* (P. T.).

Problema 2424. — *Să se stabilească identităţile*

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\operatorname{tg}3\alpha,$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\operatorname{tg}3\alpha.$$

V. Alaci

Prima soluţie. Notând cu E_1 şi E_2 primii membrii ai identităţilor şi ţinând seamă că,

$$\operatorname{cotg}(a\pm b)=\frac{\operatorname{cotg}a\operatorname{cotg}b\mp1}{\operatorname{cotg}b\pm\operatorname{cotg}a},\qquad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

putem scrie succesiv,

$$E_1=\frac{\sqrt{3}\operatorname{cotg}\alpha+1}{\operatorname{cotg}\alpha-\sqrt{3}}+\operatorname{tg}\alpha-\frac{\sqrt{3}\operatorname{cotg}\alpha-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\operatorname{cotg}\alpha+6\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha-3}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{8\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha-2}+\operatorname{tg}\alpha$$

$$=\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{9\operatorname{tg}\alpha-3\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=3\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Cum al 2-lea factor din ultimul membru este tocmai dezvoltarea lui $\operatorname{tg}3\alpha$ în funcţie de $\operatorname{tg}\alpha$, rezultă

$$E_1=3\operatorname{tg}3\alpha,$$

astfel că prima identitate este stabilită.

Pentru a 2-a identitate observăm că,

$$E_2=\frac{\sqrt{3}\operatorname{cotg}\alpha+1}{\operatorname{cotg}\alpha-\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}\operatorname{cog}\alpha-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{\operatorname{cotg}^2\alpha-3}\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=3\operatorname{tg}\alpha.$$

tocmai ce trebuia stabilit.

Soluţii date de d-ra *Criveanu Eufemia* (Lic. Craiova), *Petanca Doina* şi de d-nii: *Agape Valeriu* (Lic. Piatra-Neamţ), *Almaşanu Lazăr* (Lic Piatra-Neamţ), *Anastascscu Decebal* (P. T.), *Bălă C-tin* (Lic. Tg.-Jiu), *Bălăuţă* (Lic. Deva), *Beşchea Radu* (P. T.), *Blaga Ovidiu* (Lic. Cluj), *Bonea Anton* (Brăila), *Brasch Andrei* (P, T.), *Cernescu Nicolae*, *Chioreanu I.* (P. T.), *Chiriac C.* (Brăila), *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Constantinescu Virgil*, *Corduneanu C-tin* (Col. N. Filipescu), *Coţiu Aurel* (student, Cluj), *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina), *Crăciunescu Victor*, *Dănescu Alexandru*, *Dăscălescu V. Mihai* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Diaconu Vasile* (Col. N. Filipescu), *Dobrişan Alexandru* (P. T.), *Fleşeriu Eugen* (P. T.), *Giurconiu Vasile* (Col. N. Filipescu), *Gherian V.* (Lic. Beiuş), *Guttman Tiberiu* (Lic. Deva), *Haret Radu* (Bucureşti), *Hurezeanu Romulus* (Lic. Tg.-Jiu), *Ilea Vasile* (P. T.), *Jungher Arnold*, *Ion C. Ion* (Lic. Caracal), *Lebovics Ervin* (P. T.), *Măncescu Ion* (Col. N. Filipescu), *Manolescu Gh.* (P. T), *Marinescu D.* (Ploeşti), *Moldovan Mircea* (P. T.), *Munteanu Ioan* (Col. Filipescu), *Nedelcu Ulpius* (Şc of. de Geniu, Bucureşti), *Neguţ Ionel* (Lic. Tg-Jiu), *Novac Ioan* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuş), *Poenaru Gh.* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.), *Puşcariu Silviu* (P. T.), *Râmboiu Septimiu* Lic. Cluj), *Regep Teodor*, *Roman C-tin* (Col. Loga, Timişoara), *Scodihor Gh.* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T.), *Stan Petru* (P. T.), *Stanciu Olimpiu* (P. T.), *Stanciu Valeriu* (Lic. Milit., Craiova), *Stănilă D. G.* (Lic. Buzău), *Stern Tiberiu* (P. T.), *Stroescu Florea*, *Teiuşan Horia* (P. T), *Teodorescu Petru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Tincu C-tin* (P. T.), *Tucă Marcu* (P. T.), şi *Turbuţiu Gh.* (Lic. Cluj).

Soluţia 2-a dată de d-nii *Gligor Ioan* (student) şi *Popa Vasile* (P. T.)

Într'un articol din „R. M. T.“[1] s'a stabilit că ecuaţia

[1]) *V. Alaci:* Ecuaţii algebrice cu rădăcini trigonometrice, „R. M. T.“, Vol. XXV, pp. 15–17, 1945).

(1) $x^3+3(\operatorname{tg} 3\alpha)x^2-3x-\operatorname{tg} 3\alpha=0$,

admite rădăcinele

$$x_1=\operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right),\quad x_2=\operatorname{cotg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right),\quad x_3=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Scriind relaţiile lui *Newton*, dintre rădăcinele ecuaţiei (1) şi coeficienţii săi, anume, suma şi produsul rădăcinilor, obţinem tocmai identităţile cerute.

PROBLEME PROPUSE

2537. — Se cere patratul de şase cifre cu primele două cifre egale, ştiind că numărul format de primele două cifre divide numărul format de ultimele două cifre.

PETRE TEODORESCU

2538. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y=x-\operatorname{L}\frac{x(x+1)}{2x-1}$$

şi să reprezinte grafic.

E. ARGHIRIADE

2539 — Să se determine valorile parametrilor α şi β în aşa fel ca oricare ar fi x şi y, să avem

$$\frac{x+\alpha+\beta y}{(x^2+1)(y^2+1)}\leq\frac{(x^2+\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta y^2)}{(x+y)^2}.$$

VICTOR HERMAN

2540. — Să se arate că între laturile L_7', L_7'', L_7''' ale celor trei eptagoane regulate înscrise în cercul de rază R, avem relaţiile

$$(L_1')^2+(L_7'')^2+(L_7''')^2=7R^2,$$

$$(L_7')^2(L_2'')^2+(L_7'')^2(L_7''')^2+(L_7''')^2(L_7')^2=14R^4,$$

$$L_7'L_2''L_7'''=R^3\sqrt{7}.$$

EUGEN VISA

2541. — În plan se află construit un triunghiu ABC, cercul său circumscris şi o dreaptă Δ. Să se înscrie în cerc un alt triunghiu A'B'C' care să fie omologic cu ABC şi să aibă pe Δ ca axă de omologie.

G-L. GH. BUICLIU

2542. Să se afle locurile geometrice ale mijloacelor laturilor unui triunghiul echilateral, care se mişcă într'un plan astfel că fiecare latură a sa trece printr'un punct fix.

VIRGIL GHITESCU

2543. — Avem dreptunghiul ABC în care $AB=a$, $BC=b$. Construim apoi dreptunghiul $AB_1C_1D_1$, B_1 pe AB, D_1 pe AD astfel ca $AB_1=\frac{b}{2}$, $B_1C_1=a$. Construim după aceiaşi regulă dreptunghiurile $AB_2C_2D_2,\ldots,AB_nC_nD_n$.

1°. Să se arate că unele dintre vârfurile C_i $(i=1,2,\ldots,n)$ se găsesc pe o dreaptă, iar celelalte pe altă dreaptă.

2°. Să se afle unghiul format de cele două drepte.

V. ALACI

2544. — În raport cu două axe perpendiculare Ox, Oy se consideră punctele $M(2a\operatorname{cotg}\alpha, 0)$, $N(a\operatorname{cotg}\alpha,\ a\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{cotg}\alpha)$, unde α este un parametru variabil. Se cere:

1°. Să se arate că raza cercului înscris în triunghiul OMN este constantă. 2°. Bisectoarea interioară a vârfului M trece printr'un punct fix I. Să se explice rezultatul geometric. 3°. Fie $A(0, 4a)$ şi să se arate că dreapta MN rămâne tangentă la cercul de diametru OA. Să se explice rezultatul geometric. 4°. Să se găsească locul geometric al centrului cercului exînscris triunghiului OMN relativ la latura OM. Să se spună ce este acest loc şi să i se găsească elementele importante. 5°. Fie M', N', O' picioarele înălţimelor triunghiului OMN şi fie

$$u=MM'+NN'+OO'.$$

Notând $\operatorname{tg}\alpha=t$, atunci u este funcţie de t. Să se studieze variaţia acestei funcţii în cazul $a=\frac{1}{4}$.

GH. TH. GHEORGHIU

2545. — Să se arate că,

$$\left[1+2\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos kx\right]\left[1+2\sum_{k=1}^{2n}\cos kx\right]$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{2n}\cos 2k=\frac{\sin(4x+1)x}{\sin x}.$$

C. JONESCU-ŢIU

1° Problema 178 având enunţul neclar, se anulează.

2° Problema 1571 din „R. M. T.", Vol. XVI, p. 24, o anulăm având acelaşi enunţ ca şi problema 1898 din „R. M.T.", Vol. XX, p. 128.

Erată. În problema 1858 din trecut s'au strecurat următoarele erori de tipar:

La pag. 61, în loc de $abc46$, trebue $abc41$.
La pag. 61, în loc de $N^2=00039$, trebue $N^2=00049$

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bală C-tin (2466, 2523, 2531, 2535); *Bota Valentin* (2413, 2419, 2550); *Cărciu Ion* (2408, 2423, 2469, 2475, 2483, 2521, 2522, 2523); *Chiorenau Ioan* (P.); *Constantinescu Ilie* (N., P.); *Costăchescu V. C-tin* (N., P.); *Coţiu Aurel* (2371, 2497, 2509, 2519, 2523, 2530, 2531, 2535); *De Sabota Ioan* (1519, 2493, 2502, 2505, 2508, 2509, 2510, 2523, 2531, 2535); *Ghiţescu Virgil* (A., P.); *Ghertler Richard* (2430, 2512, 2535); *Iacob Eugen* (P.); *Hurezeanu Romulus* (N., P., 1777, 1842, 1858, 1922, 1923, 1971, 2043, 2491, 2508); *Man Iosif* (2202, 2209, 2371, 2383, 2416, 2493, 2512, 2515, 2518, 2522); *Marinescu S. D.* (2510, 2512, 2522, 2524); *Morega Titus* (2499, 2505, 2510, 2523); *Moreno Hodor* (2518, 2523); *Munteanu Giuseppe* (2362, 2496, 2497, 2508, 2512, 2522, 2523); *Neguţ Ion* (N., P., 2210, 2218, 2498, 2505, 2506, 2513, 2514, 2521, 2522, 2524, 2529, 2535); *Norbert Schlomiuc* (2387); *Pali Sergiu* (A., P.); *Pantea Alexandru* (1618, 1784, 1809, 2223, 2234, 2273, 2281, 2314, 2374. 2416, 2493, 2510, 2512, 2514, 2535); *Păsărin Gh.* (2504, 2512, 2516, 2522); *Păunescu Gh.* (2521, 2522); *Stănescu C-tin* (2345, 2346, 2522); *Teodorescu Petre* (N., P. 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511); *Tibăr Aurel*, (2497, 2521); *Toderaşc Vasile* (1513, 1519, 2499, 2505, 2508, 2518, 2523, 2524, 2530, 2531, 2535).

INFORMAŢII *)

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, şi nu în continuare.

3. A APĂRUT fasc. IV din **„67 examene de admitere la Politehnicele din România"**. Această fascicolă conţine probleme de **Geometrie Analitică** şi **probleme de sinteză**. Preţul este de 100.000 lei + 40.000 lei expediţia şi se trimete pe adresa autorului: *Gh. Th. Gheorghiu*, str. Harry Truman no. 1, Timişoara I, sau se depune la CEC sub contul no. 86405.

Preţul fasc. I (Geometrie) sau al fasc. II (Algebră) este de 200.000 lei fiecare. În caz că se comandă mai multe fascicole se va trimete pentru expediţie 10.000 de lei de fiecare, plus taxa de recomandat 30.000 lei o singură dată. Aceste preţuri nu sunt valabile decât o lună de zile.

4. *Paulini O.* Primirea revistei este dovada că sunteţi abonat.

Prof. *T. Drăgănel.* Mai scriţi-ne odată adresa dacă vreţi să vă trimetem revista acasă căci pe mandat este indescifrabil.

Prof. *Viciu A.* Vă rog trimeteţi adresa pe care să vă expediem revista.

Neguţ A. I. Afară de numerele trimese mai sunt 7, 10, 11 din vol. XXIII şi 10, 11, 12 din vol. XXV. Citiţi mai sus despre fasc. IV din „67 examene". Când vor apărea celelalte fascicole se vor anunţa în această rubrică.

Purcea M. I. Regret de reclamaţia care ne-o faceţi, dar n'am găsit nimic în urmă. Vom mai căuta.

Nicoară M. Nu se pot trimite numere din anul în curs decât la 15 Februarie 1948, şi în limita numerelor rămase, atunci descomplectate. Vă vom avea în vedere la această dată.

Ing. Aldea Minea. Din vol. XXV pot să vă trimit no. 1, 12, iar din 26, no. 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Dinulescu Gh. Vintilă. La problemele propuse se primesc soluţii până în momentul publicărei lor în rubrica „probleme rezolvate".

Cine cunoaşte pe D-nii Ing. *Cetăţeanu St.*, *Iancu M. Ion* (Bucureşti), *Vidrighin P.* (Răşinari, Sibiu) rugăm să-i anunţe a trimete adresa corect scrisă. Până acum nu li s'a putut trimete revista din această cauză. Îi rugăm totuşi să ne comunică dacă au primit vre-un număr.

*) Începând cu acest număr, vom răspunde în această rubrică, tuturor întrebărilor şi reclamaţiunilor pe care le primim dela *abonaţii* noştrii.

5. Abonaţilor, care n'au plătit preţul întegral al abonamentului, nu li s'a mai trimes no. 6. Deoarece am fost întrebaţi de unii din abonaţii cât mai au de trimes, publicăm mai jos un tablou de sumele restante ale fiecăruia (numerele din tablou reprezintă **mii**). Rugăm pe cunoscuţii lor să le comunice aceste sume pentruca plătindu-le să li se poată trimite revista. Sumele ne plătite până la 15 Septembrie vor suferi majorări.

Agapi Val.	120	Goldfracht M.	90	Popovici M.	120
Almăşanu I. Lazăr	120	Chiriş I.	30	Petreanu Gh.	120
Andreescu Vl.	90	Hurezeanu R	20	Peţanca D.	50
Adam Iosif	100	Hârza Gh.	120	Popescu M.	120
Bujor M. Nic.	60	Hrianke I.	50	Păcuraru T.	90
Buzatu Const.	50	Hordar M.	20	Popescu I. A.	120
Boerescu G.	20	Iosifescu M.	120	Popescu Tr.	120
Boiceanu Stela	50	Iuga I.	130	Popescu S.	90
Bonea Anton	120	Iancu M. I.	120	Popa P.	50
Bota Val.	50	Ion C. I.	120	Piroş Z.	20
Busuloiu Vir.	50	Ionescu M.	50	Podracky V.	90
Bergman M.	120	Iordache S.	90	Popa Cor.	50
Bandler D.	90	Irimescu Gh.	90	Petö St.	30
Borş Conşt.	120	Ioncu S.	20	Paulini O.	30
Budeu I.	50	Juncu V.	50	Păişanu C. Ilie	50
Bădescu Gh. St.	50	Ipate M,	50	Purcarea M.	50
Bârzescu Alex.	120	Kelemen M.	20	Râmboiu N. S.	20
Beşchea Radu	50	Kriz F.	90	Rădulescu N.	20
Boşca N. Dumitru	50	Loziciu I.	50	Regep T.	120
Bozenovici Nic.	50	Lic. Orf. Gojdu, Oradea	120	Roşca V.	20
Caravias P. N.	120	Lăzăreanu A.	70	Rădulescu M.	120
Chioreanu V. I.	50	Leucean M.	90	Roth E.	20
Ciuciuc N. I.	120	Lupeanu I.	90	Rosenberg A.	50
Cristcscu M.	20	Lic. M. Viteazul, Timişoara	980	Ristea Gh.	50
Cândea V.	20	Lic. Radu Negru, Făgăraş	360	Rizescu I.	50
Cernescu A. N.	50	Marinescu D S.	50	Săsărman M	20
Cioară Alex.	50	Mărgineanu Gh.	20	Şc. Ind. U. D. R, Reşiţa	600
Constantinescu Gh. V.	120	Marotinescu C.	120	Simian N.	50
Constantinescu N. Ilie	20	Moldovan I.	120	Soc. de lectură N. Iorga	120
Crăciunescu V.	90	Munteanu Gh.	120	Stefănescu B	120
Cioca I.	50	Man I. O.	20	Stancu D. D.	120
Costin O.	20	Mărtoiu C.	120	Suciu M.	120
Cherdivarenco I.	50	Munteanu Giuseppe	20	Stan P.	120
Chioreanu Ilie	20	Man Iosif	20	Stern T.	120
Cosma V.	50	Morega V. T.	30	Steiner G.	120
Dănescu Al.	120	Munteanu Gr.	20	Serban T.	50
Diea Rodica	50	Mureşan P.	150	Stanisav Ec.	50
Dinulescu Gh. Vintilă	50	Moreanu Pârvan	120	Stănescu D. C	50
Diaconu A. Ioan	90	Mateescu C.	120	Sergiu Pali	120
Deutsch E.	50	Moldovan M.	20	Stoian L.	50
Ducaru N.	120	Manolescu G	90	Schächter M.	120
Dionisiu A.	100	Mateescu O.	20	Tămăşescu Vir.	50
Dăscălescu I. M.	20	Mărcuţiu S.	50	Triteanu O.	120
Dobra Const.	120	Marian M.	120	Turiceanu O	120
Dobrescu A.	120	Mihuţ Gh.	20	Tudor A. G.	120
Domilescu E.	120	Morărescu I. P.	50	Tarcea I.	90
Dumitraşcu Cic.	120	Moldovan Lenuţa	30	Tincu C.	90
David Boris	50	Nyak G.	142	Telega D.	90
Dimitriu Tr. Const.	50	Nedelcu G. U.	142	Trifa Fl.	50
Drăguţău V.	50	Nemeth E.	50	Târcovnicu C.	50
Ernstein P.	120	Neguţ I.	20	Toderaşc V.	20
Erdos Ana	50	Novac I.	20	Ungur I.	50
Firescu Gr. F.	50	Neuman M.	20	Vasiliu D.	120
Frunteş P.	100	Onofrei L.	20	Vidrighin P.	120
Fleşeriu E.	70	Oproiu A.	120	Vârlan G.	120
Facsko Gh.	120	Păsărin Gh.	50	Vasu V.	50
Florescu D.	20	Păunescu Gh.	30	Vâlcu P. T.	50
Florea I. I.	50	Petrescu G.	50	Vătăman C.	50
Gherlan V.	50	Pop A.	142	Zaharia D.	120
Ghionea Carol	90	Popescu-Stroescu N. G. M.	120		
Georgescu N.	120	Pârvănescu M.	50		

BIBLIOTECA ASTRA

ANUL XXVII. SEPTEMVRIE 1947 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREŢUL ABONAMENTULUI ESTE 250 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ŞI 500 LEI PENTRU INSTITUŢII
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 500 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU**: UN EXERCITIU DE ALGEBRA SI O PROBLEMA DE ANALIZA.
2. **GH. TH. GHEORGHIU**: ARTICOL DE METODOLOGIE.
3. **V. ALACI**: CATEVA PROBLEME DE REZOLVIREA TRIUNGHIURILOR IN TRIGONOMETRIA PATRATICA.
4. NOTE MATEMATICE 15-16.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 244. 344, 423, 634, 1575, 1668, 1763, 2423, 2429.
7. PROBLEME PROPUSE: 2546-2554.
8. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Anunţăm cu plăcere, că începând de la 15 Septembrie 1947, mai face parte dintre membrii „R. M. T." şi D-l Profesor **Cezar Coşniţă**, Doctor în Matematici, un harnic şi distins pionier din ogorul ştiinţei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci**, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Începând cu data de 15 Septembrie, costul abonamentului pe anul în curs este de 250 lei pentru particulari, şi de 500 lei pentru instituţii. În această sumă intră şi expediţia revistei.

2. Abonaţii vechi, adică cei care s'au înscris ca abonaţi înainte de 15 August, sunt rugaţi să se conformeze circularei publicată pe ultima pagină a acestui număr. Această circulară a fost trimeasă tuturor, cu sumele ce datorează fiecare.

3. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

4. Volumele I, XXIII, XXV şi XXVI sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

5. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 3 lei la care se adaogă 2 lei expediţia.

6. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

7. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Harry Truman, Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

8. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — No. 7. TIMISOARA, SEPTEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Preţul abonamentului este 250 lei pentru particulari şi 500 lei pentru instituţii.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timişoara I, Str. Harry Truman No. 1.

UN EXERCIŢIU DE ALGEBRĂ ŞI O PROBLEMĂ DE ANALIZĂ

DE

D. POMPEIU

1. Într'o carte didactică de exerciţii (Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie par *Aubert* et *Papelier*) se găseşte şi următorul exerciţiu:

Să se demonstreze că polinomul:

$$x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$$

(în care: a, b, c sunt numere întregi şi pozitive) este divizibil prin $(1 + x + x^2)$.

Se indică, în cartea de exerciţii citată, multiplicarea cu $(x - 1)$ a dividendului şi a divizorului, iar această operaţie conduce numaidecât la evidenţiarea faptului algebric enunţat.

2. Dar exerciţiul acesta, ca şi câteva altele următoare, de aceiaşi natură din aceiaşi carte, te sileşte oarecum să faci ceia ce exprimă *Appell* (în cartea sa: *éducation* et *enseignement)* prin cuvintele: *apercevoir, avec le détail particulier de chaque question, l'idée générale dont elle procède et la place qu'elle occupe dans l'ensemble.*

Să luăm, aşa dar, un polinom oarecare

$$P(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$$

şi să căutăm condiţia în virtutea căreia polinomul acesta conţine factorul $(1 + x + x^2)$:

Artificiul întrebuinţat în exerciţiul lui *Aubert* şi *Papelier* (sau, mai bine de cât artificiu: *procedeul* decurgând dintr'un principiu general) ne indică a scrie, mai bine, polinomul nostru sub forma:

$$P(x) = (A_0 + B_0 x + C_0 x^2) + (A_1 + B_1 x + C_1 x^2) x^3 + \cdots$$

iar sub această formă putem înlocui pe x^3 şi puterile lui prin expresia identică

$$(x^3 - 1) + 1 \equiv x^3.$$

Această operaţie ne arată numaidecât că polinomul nostru se scrie sub forma generală următoare:

$$P(x) = P_0(x) + S_0 + S_1 x + S_2 x^2$$

în care $P_0(x)$ este un polinom ce conţine pe $(x^3 - 1)$ şi deci pe $(1 + x + x^2)$, ca factor, iar polinomul de gradul doi

$$Q(x) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2$$

e definit prin

$$S_0 = \Sigma A, \quad S_1 = \Sigma B, \quad S_2 = \Sigma C.$$

Atunci, dacă avem

$$S_0 = S_1 = S_2 = S, \tag{1}$$

putem scrie

$$P(x) = P_0(x) + S(1 + x + x^2)$$

şi prin urmare atunci polinomul nostru conţine pe $(1 + x + x^2)$ ca factor.

Deci condiţia (1) este condiţia căutată.

3. Vedem acum cât de simplu, faţă de *ideia generală*, este exerciţiul din *Aubert* şi *Papelier* — dar gândirea matematică nu se opreşte aci:

În loc de un polinom, ea trece la o *funcţie întreagă*, prin urmare la o problemă de Analiză:

Dacă în expresia unei funcţii întregi:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

avem

$$\Sigma A_{3k} = \Sigma A_{3k+1} = \Sigma A_{3k+2}$$
$$(\text{cu } k = 0, 1, 2, \ldots),$$

putem afirma că această funcţie conţine, ca factor, pe $(1 + x + x^2)$ şi că deci funcţia se anulează în punctele

$$z = \alpha, \quad z = \alpha^2$$

care sunt rădăcinele ecuaţiei

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0.$$

Iată, pentru cititor, un exerciţiu mai interesant de cât cel primitiv, de Algebră, de la care am plecat.

ARTICOL DE METODOLOGIE

DE

GH. TH. GHEORGHIU.

(Urmare)

5. *Să ne ferim de ipoteze tacite* spunea *Ţiţeica.* De multe ori în demonstraţia unei teoreme facem anumite ipoteze uitându-le să le trecem în enunţ, şi se întâmplă că în cazurile frecvente de folosire a teoremei, aceste ipoteze sunt satisfăcute!

Iată un exemplu. Se cunoaşte teorema elementară: *maximul unui produs de factori pozitivi, a căror sumă este constantă, are loc atunci când factorii sunt proporţionali cu puterile lor.*

Refaceţi demonstraţia teoremei şi veţi vedea că în demonstraţie se presupune implicit că factorii *pot* fi egali, condiţie care se poate întâmpla să nu fie satisfăcută. De exemplu, să presupunem că ni se cere maximul produsului

$$(x+4)^2(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Suma factorilor: $(x-4)+(1-x)=3$ este constantă.

Aplicând teorema trebue să avem

$$\frac{x+4}{2}=\frac{1-x}{-\frac{1}{2}};\quad x=\frac{8}{3},$$

rezultat absurd deoarece produsul dat este imaginar pentru această valoare! În enunţul teoremei de mai sus, pentru a fi complectă, trebue să-i adăogăm la sfârşit cuvintele: *atunci când acest lucru se poate.*

În cazul exemplului dat, se vede că x nu poate lua decât valori care satisfac inegalitatea $x \leqq 1$. Făcând derivata se constată că produsul are un singur minim pentru $x=-4$ în intervalul său de existenţă.

6. Ceva despre regula lui *Hôspital.* Mai întâiu s'o enunţăm, ţinând seamă de toate condiţiile impuse de demonstraţie. Fie raportul

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

unde $f(x)$ şi $g(x)$ sunt funcţiuni supuse condiţiilor:

1. $f(a)=g(a)=0$,

2. $f(x)$ şi $g(x)$ sunt continui şi derivabile în vecinătatea lui a,

3. $g'(x)$ nu se anulează de o infinitate de ori în vecinătate lui a,

4. raportul

$$\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

are o limită pentru $x=a$, atunci *regula lui Hôspital* spune că,

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Numărul a poate fi chiar simbolul ∞.

Ţinând seamă de condiţiile de mai sus, rezultă că toate proprietăţile stabilite cu ajutorul acestei regule vor trebui să conţină aceste condiţii.

Din acest punct de vedere să-mi fie permis să pun în evidenţă o greşeală frecventă care se face aplicându-se regula lui *Hôspital* [2]. Să considerăm o serie al cărui termen general este

$$u_n=f(n),$$

unde n ia valori întregi şi pozitive. Ce poate fi mai caracteristic discontinuu peste tot ca funcţiunea $f(n)$. Incercaţi să reprezentaţi grafic această funcţiune, veţi obţine o infinitate de puncte situate pe ordonatele ale căror abscise sunt numere întregi şi pozitive. Se poate vorbi atunci de derivata termenului general al unei serii în raport cu indicele său? Hotărât că nu! Totuşi iată greşeala care se face: încercându-se să se găsească natura seriei, aplicând criteriul raportului

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{f(n+1)}{f(n)},$$

şi dacă nedeterminarea obţinută la limită nu este uşor de ridicat, se aplică regula lui *Hôspital*! Este adevărat că acest procedeu duce uneori la rezultat. Dar în acest caz trebue aplicat corectivul următor. Se consideră funcţiunea

$$F(x)=\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

obţinută înlocuind pe n cu o variabilă continuă x. Dacă raportul din partea dreaptă, când x tinde către infinit *în mod continuu*, satisface condiţiilor impuse de regula lui *Hôspital*, şi dacă această re-

---

[2]) De exemplu, această greşală este întâlnită chiar în răspânditele cărţi ale lui *Papelier*, în Exercices d'Algèbre d'Analyse et de Trigonometrie, vol. I, pag. 60 (ed. 7-a).

gulă aplicată dă un rezultat, evident că şi atunci când va tinde către infinit prin valori întregi vom avea aceeaşi limită.

Geometric, aceasta revine la lucru următor. Dacă

$$\lim_{x=\infty} F(x) = A,$$

limita A fiind găsită printr'o modalitate oarecare, de exemplu prin regula lui *Hôspital*, atunci când această regulă se aplică, însemnează că curba reprezentativă a funcţiunei

$$y = F(x),$$

tinde asimptotic către dreapta $y = A$. Dacă din această curbă nu vom păstra *decât punctele corespunzătoare absciselor* egale cu numerele întregi şi pozitive, ştergând restul, evident că vom tinde pentru $n = \infty$) printr'un şir infinit de puncte discrete, către aceeaşi valoare y=A, adică vom avea şi

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = A.$$

7. Tot despre regula lui *Hôspital* vreau să mai adaug ceva. Se găsesc în diferite cărţi exemple când această regulă nu se poate aplica din cauza că nu este îndeplinită una din condiţiile cerute. Dar n'am văzut nicăieri un exemplu când deşi toate condiţiile sunt îndeplinite, regula oricât am aplica-o, ea nu duce la nici un rezultat. Iată un asemenea exemplu. Să presupunem că vrem să calculăm

$$(5) \qquad \lim_{x=0} \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}-1}}.$$

Făcând înlocuirea, se găseşte că expresia dată are forma nedeterminată $^0/_0$. Aplicând regula lui *Hôspital* se găseşte

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}-1}} = \lim_{x=0} \frac{1}{\frac{x\,e^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}-1}}} = \lim_{x=0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{x}\, e^{-x^2},$$

care în ipoteza că vom găsi o limită, aplicând o teoremă cunoscută asupra limitelor, putem scrie mai simplu sub forma

$$(6) \lim_{x=0} \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}-1}} = \lim_{x=0} e^{-x^2} \lim_{x=0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{x} = \lim_{x=0} \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{x},$$

care se prezintă iarăşi sub forma nedetermită $^0/_0$. Aplicând din nou regula lui *Hôspital* ajungem la expresia sub forma dată la început, şi deci oricât am continua nu ajungem la nici un rezultat!

Rog pe cititorii acestor rânduri să încerce să găsească şi alte exemple de această natură, dar să aibă altă formă [3].

Inainte de a termina cu această chestiune, să-mi fie permis să fac două observări.

1° S'ar putea ca cineva să-mi facă următoarea obiecţie. Notând cu l limita cerută, relaţia (6) se scrie

$$l = \frac{1}{l};\quad l^2 = 1;\quad l = \pm 1,$$

şi cum fracţia dată este pozitivă, rezultă $l = 1$. Iată deci că relaţia (6) conţine soluţia problemei, cu alte cuvinte limita dată a fost găsită tot cu regula lui *Hôspital!* Mare greşală face cine spune acest lucru. În adevăr, a nota expresia dată cu l însemnează iniţial punerea ipotezei că expresia dată *are o limită*, ipoteză pe care nimic nu ne îndreptăţeşte s'o facem. Ca să se vadă greşala care am comis-o, voiu face o analogie. Să considerăm seria

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + \cdots$$

categoric divergentă deoarece termenul general nu tinde către zero. Să presupunem că facem abstracţie de acest lucru şi să presupunem că are o sumă pe care s'o notăm cu S. Avem

$$(7) \quad S = 1 + 2(1 + 2 + \cdots + 2^n + \cdots) = 1 + 2S$$

relaţie care ne dă $S = -1$. Am găsit deci suma seriei! Ce rezultat absurd: suma unei serii cu toţi termenii pozitivi, este negativă. Iată la ce rezultat putem ajunge uneori făcând ipoteze greşite. (În realitate greşala s'a făcut când am rezolvat ecuaţia (7), deoarece S fiind infinit, nu putem lucra cu el ca şi cu numerele finite).

2° Ca să nu lăsăm lucru neterminat, să găsim limita expresiei (5). Cum

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \lambda x^4,$$

unde λ este o funcţiune ce rămâne finită când x tinde către zero, expresia dată se mai scrie

$$\lim_{x=0} \frac{x}{x\sqrt{1+\lambda x^2}} = \lim_{x=0} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda x^2}} = 1.$$

(Va urma)

---

[3]) Un alt exemplu *de aceeaşi formă* este

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

CÂTEVA PROBLEME DE REZOLVIREA TRIUNGHIURILOR ÎN TRIGONOMETRIA PATRATICĂ

DE

V. ALACI

I.

Începem, reamintind o definiție și o teoremă din *Trigonometria patratică:*

Definiție. *Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu oarecare* A B C *și dacă construim trei triunghiuri dreptunghice având respectiv catetele* $a, b+c$; $b, c+a$; $c, a+b$, *atunci unghiurile* α, β, γ *ce se opun respectiv catetelor a, b, c în cele trei triunghiuri construite, le numim unghiuri asociate triunghiului* A B C. (T. p. p. 52). Evident că α, β, γ sunt mai mici ca 45°.

Teoremă. *Într'un triunghiu oarecare* A B C, *în care* α, β, γ *sunt unghiurile asociate, avem relațiile*

$$(1)\quad \frac{a}{sp\,\alpha}=\frac{b}{sp\,\beta}=\frac{c}{sp\,\gamma}=\frac{b+c}{cp\,\alpha}=\frac{c+a}{cp\,\beta}=\frac{a+b}{cp\,\gamma}=2p;$$

$$(2)\quad sp\,\alpha+sp\,\beta+sp\,\gamma=1.$$

(T. p. p. 53).

II.

Cu această pregătire să rezolvăm următoarele probleme:

Problema 1. *Să se rezolve un triunghiu* ABC, *cunoscând latura a și unghiurile asociate* β *și* γ.

Soluție. Din relațiile (1), ținând seamă de (2), avem,

$$\frac{a}{1-sp\,\beta-sp\,\gamma}=\frac{b}{sp\,\beta}=\frac{c}{sp\,\gamma},$$

de unde

$$(3)\quad b=\frac{a\,sp\,\beta}{cp\,\beta-sp\,\gamma};\quad c=\frac{a\,sp\,\gamma}{cp\,\beta-sp\,\gamma},$$

$\beta<\gamma$; în caz contrar s'ar permuta în numitor β și γ.

Avem astfel calculate laturile b, c în funcție de a, β, γ.

Laturile triunghiului A B C fiind acum cunoscute, putem privi problema rezolvată, fiindcă din *Trigonometria circulară* se știe calcula și unghiurile.

Observare. In locul formulelor (3), am putea folosi altele echivalente, însă calculabile prin logaritmi, fiindcă

$$(4)\quad cp\,\beta-sp\,\gamma=\frac{\cos\beta}{\sin\beta+\cos\beta}-\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma+\cos\gamma}=\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sqrt{2}\sin(45^0+\beta)\sin(45^0+\gamma)},\quad (0<\beta,\gamma<45^0),$$

astfel că relațiile (3) se pot înlolcui cu următoarele,

$$b=\frac{a\,sp\,\beta}{\sqrt{2}\sin(45^0+\beta)\sin(45^0+\gamma)},\quad c=\frac{a\,sp\,\gamma}{\sqrt{2}\sin(45^0+\beta)\sin(45^0+\gamma)}$$

Problema 2. *Să se rezolve un triunghiu* A B C *cunoscând laturile a, b și unghiul asociat* α.

Soluție. Din șirul de rapoarte (1) reținem,

$$\frac{c}{sp\,\gamma}=\frac{a+b}{cp\,\gamma},$$

de unde

$$c=(a+b)\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

ceeace de altfel puteam scrie imediat din triunghiul asociat.

Triunghiul A B C îl putem considera acum rezolvat, cunoscându-i laturile.

Problema 3. *Să se rezolve un triunghiu* ABC *cunoscând laturile a, b și unghiul asociat* α.

Soluție. Din relațiile (1) deducem

$$b+c=a\frac{cp\,\alpha}{sp\,\alpha}=a\,\mathrm{cotg}\,\alpha,$$

de unde

$$c=a\,\mathrm{cotg}\,\alpha-b.$$

Laturile a, b, c fiind cunoscute, considerăm triunghiul A B C rezolvat.

Problema 4. *Să se rezolve un triunghiu oarecare* A B C *cunoscând latura a și unghiurile asociate* α, β.

Soluție. Deducem din relațiile (1), ținând seamă și de (2)

$$(5)\quad b=a\frac{sp\,\beta}{sp\,\alpha},$$

$$c=\frac{a\,sp\,\gamma}{sp\,\alpha}=\frac{a(1-sp\,\alpha-sp\,\beta)}{sp\,\alpha}=\frac{a(cp\,\alpha-sp\,\beta)}{sp\,\alpha},\quad (\alpha>\beta).$$

Având în vedere (4), mai putem scrie

$$(6)\quad c=\frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}\,sp\,\alpha\,sp(45^0+\alpha)\,sp(45^0+\beta)}.$$

Cunoscând latura a și laturile b, c date de (5) și (6), triunghiul A B C îl putem considera rezolvat.

Problema 5. *Să se rezolve un triunghiu oarecare* A B C *cunoscând latura a, unghiul* A *şi unghiul asociat* α.

Soluţie. Din şirul de rapoarte (1) deducem

$$b + c = a\frac{cp\,\alpha}{sp\,\alpha} = a\operatorname{cotg}\alpha.$$

Inlocuind a, b, c cu valorile proporţionale: sin A, sin B, sin C, găsim

$$\sin B + \sin C = \sin A \operatorname{cotg}\alpha,$$

sau

$$2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\alpha.$$

Simplificând, obţinem

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\alpha,$$

relaţie care ne permite a afla pe $B-C$. Cum $B+C=180^0-A$, avem cu uşurinţă unghiurile B şi C. Triunghiului A B C îi cunoaştem acum latura a şi unghiurile B, C şi rezolvirea lui este astfel cunoscută.

Problema 6. *Să se rezolve un triunghiu oarecare* A B C *cunoscând latura a, unghiul* A *şi unghiul asociat* β.

Soluţie. Din şirul de rapoarte (1) deducem

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a+c}$$

şi înlocuind a, b, c cu valorile proporţionale: sin A, sin B, sin C, putem scrie

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin B}{\sin A + \sin C}. \tag{7}$$

Cum $\sin C = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$, relaţia (7) devine

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin B}{\sin A(1+\cos B) + \sin B\cos A} = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\sin A\cos^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos A} =$$

$$\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin A\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos A} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\sin A + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cos A}.$$

De aci scoatem,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\sin A\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta\cos A},$$

relaţie care ne permite a afla unghiul B. Acum, în triunghiul A B C, cunoaştem latura a şi unghiurile A, B, prin urmare putem privi problema ca rezolvată.

Observare. Alte probleme analoage sunt tratate în *Trigonometria patratică*, p. p. 115—122.

NOTE MATEMATICE

16. — *Asupra problemei nr. 2132*).*

Ecuaţia propusă

$$x^4 + 4x^2 - 8x + 6 = 0$$

se mai poate rezolva în modul următor:

Incercăm să descompunem partea 1-a a ei într'un produs de doi factori de gradul al 2-lea,

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a+c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Făcând identificarea se obţine sistemul,

$$a + c = 0,\ b + d + ac = 4,\ ad + bc = -8,\ bd = 6.$$

Trăgând valoarea lui c din prima ecuaţie şi substituind-o în următoarele două, găsim:

$$d + b = 4 + a^2,\quad d - b = -\frac{8}{a}.$$

De unde:

$$d = \frac{1}{2}\left(4 + a^2 - \frac{8}{a}\right),\ b = \frac{1}{2}\left(4 + a^2 + \frac{8}{a}\right).$$

Inlocuind aceste valori în ultima ecuaţie, găsim:

$$\frac{1}{4}\left[(a^2+4)^2 - \frac{64}{a^2}\right] = 6,\ a^6 + 8a^4 - 8a^2 - 64 = 0,$$

$$(a^2+8)(a^4-8) = 0.$$

Pentru sistemul precedent putem lua, în consecinţă, următorul sistem de soluţii

$$a = \sqrt{2\sqrt{2}},\quad d = 2 + \sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$c = -\sqrt{2\sqrt{2}},\quad b = 2 + \sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

*) Se anulează nota 26 din „R. M. T." vol. XXVI, p. 135 şi se înlocueşte cu prezenta.

Rezolvarea ecuației propuse s'a redus la rezolvarea ecuațiunilor

$$x^2+\sqrt{2\sqrt{2}}\,x+2+\sqrt{2}+\frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=0$$

$$x^2-\sqrt{2\sqrt{2}}\,x+2+\sqrt{2}-\frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=0.$$

iar soluțiile sunt

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt[4]{2^3}\pm\sqrt{-8-2\sqrt{2}-8\sqrt[4]{2}}\right)$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2^3}\pm\sqrt{-8-2\sqrt{2}+8\sqrt[4]{2}}\right).$$

Este interesant de verificat că aceste soluții sunt identice cu cele publicate la pag. 70 Vol. XXV.

VIRGIL GHITESCU

---

16. — *Aplicații ale Trigonometriei patratice la Navigația astronomică.*

Considerăm triunghiul sferic de poziție: *Pol Superior — Zenit — Astru.*

Elementele acestui triunghiu sunt[1]):

$$PZ = l = \text{colatitudinea} = 90^0 - \varphi.$$
$$ZA = z = \text{distanța zenitală} = 90^0 - h$$
$$PA = p = \text{distanța polară} = 90^0 - \delta,$$

φ = latitudinea observatorului, h = înălțimea astrului, δ = declinația astrului.

Unghiurile acestui triunghiu sunt: Unghiul la pol P, unghiul la zenit Z, unghiul paralactic A.

Aplicăm o relație cunoscută din Trigonometria sferică:

$$\operatorname{cotg} p \sin l = \cos l \cos P + \sin P \operatorname{cotg} Z.$$

Impărțind cu $\sin P \sin l$, avem

$$\operatorname{cotg} p \operatorname{cosec} P = \operatorname{cotg} l \operatorname{cotg} P + \operatorname{cosec} l \operatorname{cotg} z \quad \text{sau:}$$
$$\operatorname{cotg} z \sec\varphi = \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec} P - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg} P.$$

Considerăm φ și δ pozitive.

$$\operatorname{cotg} z \sec\varphi = \operatorname{cosec} P\,(1+\operatorname{tg}\delta-1)-$$
$$-\operatorname{cotg} P\,(1+\operatorname{tg}\varphi-1).$$

$$=\frac{\operatorname{cosec} P}{cp\,\delta}-\frac{1}{\sin P}=\frac{\operatorname{cotg} P}{cp\,\varphi}+\frac{\cos P}{\sin P}$$

$$=\frac{\operatorname{cosec} P}{cp\,\delta}-\left(\frac{\operatorname{cotg} P}{cp\,\varphi}+\operatorname{tg}\frac{P}{2}\right).$$

Unghiul Z se va putea calcula cu ajutorul a trei table: Aceste table vor calcula:

$$\frac{\operatorname{cosec} P}{cp\,\delta}=A,$$

$$-\left(\frac{\operatorname{cotg} P}{cp\,\varphi}+\operatorname{tg}\frac{P}{2}\right)=B;\quad \operatorname{cotg} Z \sec\varphi = C.$$

Intrând în tabla A cu P și φ, vom găsi coeficientul A, care adunat cu coeficientul B ne va da coeficientul C. In tabla C intrând cu C și φ, vom găsi unghiul Z,

Valoarea unghiului Z, foarte importantă în Navigația astronomică, serșește pentru trasarea dreptelor de înălțime și pentru calculul deviației compasului.

LT. C-DOR C V COSTACHESCU

[1]) Notațiile sunt cele din Marina Regală.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, No. 12, August 1947. Relațiuni între câteva funcțiuni simetrice, de *Mircea Adam*. Raport asupra premiului de Mecanică *„Spiru Haret"*, de Ing. *Al. Bunescu*, Ing. *Alex. Stoenescu* și Ing. *Gabriela Țițeica*. Note matematice. Probleme rezolvate și propuse. Tabla de materii.

2. *Botez Șt. Mihail:* Contribuție pentru o simplificare a sistemului de proecție *Monge*, într'un caz special.

3. *Botez Șt. Mihail:* Studiul Geometriei Descriptive acum o sută de ani în România. † *Nicolae Abramescu.*

PROBLEME REZOLVATE

Problema 244. — *Să se desvolte produsul*

$$P=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)\,(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)$$
$$(x_1y_3+x_3y_1+x_3y_2).$$

Să se deducă expresia lui

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^3$$

și să se verifice rezultatul.

D. V. IONESCU

Soluție. 1° Dacă se fac calculele, se ajunge la următorul rezultat,

$$P=(x_1^3+x_2^3+x_3^3)y_1y_2y_3+(y_1^3+y_2^3+y_3^3)x_1x_2x_3$$
$$+(y_2^2y_3+y_3^2y_1+y_1^2y_2)(x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_1^2x_2)+$$
(1) $$+(y_2^2y_1+y_3^2y_2+y_1^2y_3)(x_2^2x_1+x_3^2x_2+x_1^2x_3)+$$
$$+3x_1x_2x_3y_1y_2y_3,$$

simetric în x_1, x_2, x_3 şi y_1, y_2, y_3.

2° Dacă se face în formula (1)

$$x_1=X_1,\ x_2=X_2,\ x_3=X_3 \text{ şi } y_1=y_2=y_3=1,$$

se obţine formula,

$$(X_1+X_2+X_3)^3=X_1^3+X_2^3+X_3^3+3X_1^2X_2+X_2^2X_3+$$
(2) $$+X_3^2X_1)+3(X_1^2X_3+X_2^2X_1+X_3^2X_3)+6X_1X_2X_3$$

care se poate verifica cu uşurinţă.

Făcând în formula (2),

$$X_1=x_2x_3,\ X_2=x_3x_1,\ X_3=x_1x_2,$$

se obţine

$$(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)^3=x_2^3x_3^3+x_3^3x_1^3+x_1^3x_2^3$$
$$+3x_1x_2x_3(x_2x_3^2+x_3x_1^2+x_1x_2^2)$$
$$+3x_1x_2x_3(x_3x_2^2+x_1x_3^2+x_2x_1^2)$$
$$+6x_1^2x_2^2x_3^2.$$

Au rezolvat problema D-nii *Corneliu N. Popescu* şi *Ioan Th. Popovici.*

D. V. I.

Problema 344. — *Se dau n cercuri în plan. Să se găsească locul punctelor* M *de unde putem duce tangente la aceste cercuri, astfel ca suma pătratelor ariilor patrulaterelor care au ca vârfuri punctul* M, *punctele de contact şi centrele cercurilor date, să fie constantă. Să se cerceteze dacă locul poate să fie imaginar, sau redus la un punct. Să se determine punctul* M *astfel ca suma pătratelor ariilor patrulaterelor să fie maximă sau minimă.*

ION DILI SCHILERU

Soluţie dată de D-l *C. Berdan* (Bârlad). Fie

$$C_i(x,y)\equiv x^2+y^2+2M_ix+2N_iy+P_i=0,$$
$$(i=1,2,\ldots,n),$$

ecuaţiile celor *n* cercuri date, şi fie $M(\alpha,\beta)$ un punct al locului. Suprafaţa patrulaterului ale cărui vârfuri sunt M, punctele de contact ale tangentelor duse din acest punct la cercul C_i şi centrul lui, este egală cu t_ir_i, unde am notat cu t_i lungimea comună a celor două tangente (şi deci t_i^2 este puterea lui M faţă de C_i) şi prin r_i raza cercului C_i. Problema cere să găsim locul punctelor M astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n}t_i^2r_i^2=\sum_{i=1}^{n}r_i^2C_i(\alpha,\beta)=k^2,$$

k fiind o constantă. Această relaţie spune că punctul M se găseşte pe curba

$$(x^2+y^2)\sum_{i=1}^{n}r_i^2+2x\sum_{i=1}^{n}M_ir_i^2+2y\sum_{i=1}^{n}N_ir_i^2+$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}P_ir_i^2-k^2\right)=0,$$

adică locul este un cerc ale cărui elemente se citesc pe această ecuaţie.

Cum raza acestui cerc este dată de formula

$$R^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}M_ir_i^2\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}N_ir_i^2\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}r_i^2\right)^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}P_ir_i^2-k^2}{\sum_{i=1}^{n}r_i^2},$$

locul căutat va fi imaginar, sau redus la un punct, după cum această expresie este negativă, sau nulă. Cu alte cuvinte pentru puncte reale ale locului, avem,

$$k^2\geqq\sum_{i=1}^{n}P_ir_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}M_ir_i^2\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}N_ir_i^2\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}r_i^2},$$

prima parte reprezentând suma ariilor patrulaterelor din enunţ. Această sumă are deci un *minim*, când este egală cu partea dreaptă a formulei precedente, adică atunci când locul se reduce la un punct; în acest caz M este în centrul acestul loc.

Gh. Th. Gh.

Problema 423. — *Să se afle locul geometric al proiecţiei ortocentrului unui triunghiu* A B C *pe mediana corespunzătoare vârfului* A, *ştiind că punctele* B *şi* C *sunt fixe şi că suma pătratelor medianelor triunghiului e constantă.*

R. B. POPA-RADU ET

Soluţia. Din faptul că B şi C sunt fixe, rezultă că latura a este constantă. Mai mult, cum suma medianelor unui triunghiu este egală cu

$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2),$$

rezultă că şi suma b^2+c^2 este constantă. Aceste proprietăţi duc la următoarele concluzii: 1° Dacă A_2 este mijlocul lui BC, atunci

$$AA_2=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\text{const.}$$

2° Dacă B_1, este piciorul înălţimei coborâtă din B pe AC, atunci

$$a^2=b^2+c^2\pm 2AC\cdot AB_1$$

adică produsul $AC\cdot AB_1=\text{const.}$

Fie acum A_1 proiecţia lui A pe BC şi M proiecţia ortocentrului H pe mediana AA_1. Din patrulaterele inscriptibile MHA_1A_2 şi HA_1CB_1 rezultă

$$AM.AA_2=AH.AA_1=AB_1.AC;AM.AA_2=AB_1.AC.$$

Ţinând seamă de cele stabilite mai sus, rezultă din această relaţie că AM, şi deci A_2M, este constantă. Cum B, C sunt fixe şi A_2 va fi fix, încât locul căutat este un cerc cu centrul în A_2 şi de rază A_2M.

D-nul *C. Coşniţă* a dat o foarte bună soluţie geometrică. D-nii *Beju Tr., Blasko B., Caracaş Gh. Frumuşelu Gh., Grofşorean Gh., Nicolescu I. Em., Petrovici D., Popovici* A., *Ţancovici V. C.* şi *Vasilescu B.*, au dat soluţii analitice. Gh. Th. Gh.

Problema 634. — *Se dă un triunghiu* ABC *şi un punct* M *în planul acestuia. Să se circumscrie acestui triunghiu un altul omologic cu el, astfel ca centrul de omologie să fie în* M.

S. M. FELDSTEIN

Soluţie dată de D-l Prof. *N. N. Mihăleanu* (Bucureşti).

Problema cere să se construiască un triunghiu $A'B'C'$ care să răspundă condiţiilor: 1° vârfurile A', B', C' să se găsească pe dreptele MA, MB, MC; 2° laturile $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ să treacă prin vârfurile C, A, B. Presupunem problema rezolvată şi considerăm patrulaterul complect $A'BMCC'B'$. Teorema lui *Pappus* spune că $(AA''MA')=-1$, unde A'' este punctul de intersecţie dintre dreapta AM şi latura BC. Cum punctele A, M, A'' sunt cunoscute, determinarea lui A' este cunoscută. Analog se construiesc punctele B', C' şi deci triunghiul căutat.

Gh. Th. Gh.

Problema 1575. — 1° *Se dă triunghiul* ABC *înscris în cercul* O *şi fie* A_1 *intersecţia dreptei* BC *cu tangenta în* A *la cerc. Să se arate că*

$$A_1C:A_1B=\overline{AC}^2:\overline{AB}^2.$$

2° *Însemnăm cu* A_1, B_1, C_1 *intersecţiile laturilor* BC, CA, AB *respectiv cu tangentele în* A, B, C *la cerc, să se arate că punctele* A_1, B_1, C_1 *sunt colineare.* 3° *Fie* A_2, B_2, C_2 *conjugatele armonice ale punctelor* A_1, B_1, C_1 *în raport cu* BC,CA,AB; *să se arate că dreptele* AA_2, BB_2, CC_2, *sunt concurente.* 4° *Să se probeze că* AA_2. BB_2, CC_2 *sunt simedianele triunghiului* ABC *şi că trec prin vârfurile triunghiului format de tangentele în* A, B, C, *la cercul* O.

N. ABRAMESCU

Proprietăţile cuprinse în enunţul problemei sunt cunoscute; ele formează proprietăţile clasice ale simedianelor unui triunghiu Au rezolvât problema, sau au indicat locul unde ce găsesc aceste proprietăţi, D-nii *Andreienachievici Al Vl.* (Iaşi), *Crisea I. N.* (Blaj), *Dăscălescu Hr.* (Focşani), *Jidanu C.* (Bacău), *Negrea A. M.* (Brăila), *Ripianu A.* (Cluj), *Şeibulescu A. C.* (Bucureşti), *Ştefănescu D. Nic.* (Târgovişte), *Teodorescu N. Dorin* (Târgovişte) şi *Wegener Eug.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 1668. — *Dintre toate patrulaterele înscrise în acelaşi cerc, să se găsească acela de suprafaţă maximă.*

CEZAR IVANESCU

Soluţie. Punem $\sphericalangle AOB=x$, $\sphericalangle BOC=y$, $\sphericalangle COD=z$, $\sphericalangle DOA=360^0-(x+y+z)$. Dacă R este raza cercului, suprafaţa patrulaterului este dată de formula

$$S=\frac{1}{2}R^2[\sin x+\sin y+z-\sin(x+y+z)].$$

Maximul acestei funcţiuni, de trei variabile este dat de valorile lui x, y, z cari anulează cele trei derivate parţiale, adică de valorile lui x, y, z cari verifică sistemul

$$\cos x=\cos y=\cos z=\cos(x+y+z).$$

Cum x, y, z sunt unghiuri mai mici decât 180°, primele două ecuaţii spun că $x=y=z$, iar ecuaţia rămasă

$$\cos x=\cos 3x$$

cere ca: $3x=360^0k\pm x$, adică $x=90^0$. Pentru a vedea dacă în acest caz S este maxim, formăm expresia

$$\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)}S$$

pentru valorile lui x, y, z găsite. Cum valoarea acestei expresii este

$$=-\frac{1}{2}R^2(h+k+l)^2<0$$

S are pentru $x=y=z=90^0$ un maxim. In acest caz patrulaterul este pătratul înscris în cerc.

Toate soluţiile primite conţin greşeli. Ceiace este mai trist este că conţin greşeli de raţionament. Singurul care s'a apropiat puţin de soluţia de mai sus este D-l *Aman V. C.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1763. — *Se dă triunghiul* A B C *dreptunghic şi* A D *înălţimea unghiului drept. Se duce* D M *paralelă cu* A C *şi* D N *paralelă cu* A B (M *pe* A B, N *pe* A C). *Fie* S *aria triunghiului* A B C *şi* S_1 *aria dreptunghiului* AMDN. *Notaţiile fiind cele obişnuite, să se arate că*

$1^0.\ 2SS_1=\overline{AD}^4.$ $\qquad 2^0.\ S_1=a^2\left(\frac{1}{2}\sin 2B\right)^3.$

$3^0.\ \Sigma\sin^3 2A=\frac{8\overline{AD}^4}{a^2S}.$ $\qquad 4^0.\ \frac{S^3}{S_1}=\frac{a^4}{8}.$

MIHU CERCHEZ

Soluţie dată de d-nii Prof. *Corneliu N. Popescu* şi Ing. *Mircea V. Aldea.*

1^0. Avem:

$$2S=AB.AC \text{ şi } S_1=DM.DN$$

încât: $2SS_1=(AB.MD)(AC.DN).$

Cum însă $AB.MD=AD.BD$ şi $AC.DN=AD.DC$ ca exprimând dublul suprafeţelor triunghiurilor ADB, ADC, avem mai departe

$$2SS_1=AD^2(BD.DC)=\overline{AD}^4,$$

triunghiul fiind dreptunghic.

2^0 Formula precedentă dă

$$S_1=\frac{\overline{AD}^4}{2S}=\frac{\overline{AD}^4}{AD.BC}=\frac{\overline{AD}^3}{BC}=\frac{\overline{AD}^3}{a}.$$

Din triunghiul A D B scoatem $AD=AB\sin B$, iar din ABC: $AB=a\cos B$; încât $AD=a\sin B\cos B=\frac{1}{2}a\sin 2B$. Inlocuind în formula precedentă, obţinem tocmai a 2-a relaţie din enunţ.

3^0 In baza relaţiilor precedente, avem

$$\frac{8\overline{AD}^4}{a^2S}=\frac{16SS_1}{a^2S}=\frac{16S_1}{a^2}=2\sin^3 2B,$$

adică a treia relaţie din enunţ se reduce la

$$\sin^3 2A+\sin^3 2B+\sin^3 2C=2\sin^3 2B.$$

Această relaţie este evidentă, deoarece cum $A=90^0$, $\sin 2A=0$, iar $\sin 2C=\sin 2(90^0-B)=\sin(180^0-2B)=\sin 2B$.

4^0 In baza primei relaţii avem

$$\frac{S^3}{S_1}=\frac{2S^4}{SS_1}=\frac{2S^4}{\overline{AD}^4},$$

încât relatia patra se reduce la: $S^4=\frac{1}{16}a^4\overline{AD}^4$.

Alte soluţiii date de d-nii: *Buznea D. Dinu, Cazanachi V. Petre, Cherţman S. Mozeş, Chintescu M. Matei, Cristea I. Nicolae, Enache Ion, Enăchescu Gr. Iou, Gligor N. Ion, Goga Florian, Jidanu I. Const., Luca I. I., Mărgărit Nicolae, Mihoc N. Ovidiu, Modâlcă S. Emil, Păläceanu D. Vasile, Popescu I. Adrian, Şimon S. Petru, Sorian Oscar, Stanciu A Petre, Theodorescu N. Dorin, Tilică C. Ştefan, Tincu C. Const., Vasiliu Gh. D-tru, Vijelie Gh. Eug.* şi *Wegener Eug.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2423. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$30x^6-133x^5-1273x^4+px^3+qx^2-568x+192=0$$

şi să se determine p şi q, ştiind că între primele două rădăcini avem relaţiile,

$$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=\frac{7}{36},\qquad x_1^3+x_2^3=\frac{35}{216},$$

iar celelalte rădăcini formează o diviziune armonică.

ION CARNATIU

Soluţie. Relaţiile date sunt suficiente pentru a afla rădăcinele x_1 şi x_2. In adevăr, putem scrie,

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=\frac{35}{216},$$

de unde, în virtutea primei relaţii deducem

$$(1)\qquad x_1+x_2=\frac{35}{216}:\frac{7}{36}=\frac{5}{6}.$$

Apoi,

$$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=\frac{25}{36},$$

de unde, in baza relaţiei (1) scoatem

$$3x_1x_2=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{36}=\frac{1}{2},\text{ deci }(2)\ x_1x_2=\frac{1}{6}.$$

Am găsit astfel

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{6}, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{6}$$

şi deci ecuaţia care admite rădăcinile x_1, x_2 este

$$t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6} = 0,$$

sau

$$6t^2 - 5t + 1 = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie, obţinem

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12},$$

deci

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Inlocuind pe x în ecuaţia dată prin $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$, rădăcinele ei, avem

$$\begin{cases} \frac{30}{2^6} - \frac{133}{2^5} - \frac{1273}{2^4} + \frac{p}{2^3} + \frac{q}{2^2} - \frac{568}{2} + 192 = 0 \\ \frac{30}{3^6} - \frac{133}{3^5} - \frac{1273}{3^4} + \frac{p}{3^3} + \frac{q}{3^2} - \frac{568}{3} + 192 = 0, \end{cases}$$

sau,

$$\begin{cases} -\frac{118}{2^5} - \frac{1273}{2^4} + \frac{p}{2^3} + \frac{q}{2^2} - 92 = 0 \\ -\frac{122}{3^5} - \frac{1273}{3^4} + \frac{p}{3^3} + \frac{q}{3^2} + \frac{8}{3} = 0. \end{cases}$$

Scăpând de numitori, găsim

$$\begin{cases} -118 - 2546 + 4p + 8q - 3944 = 0 \\ -123 - 3819 + 9p + 27q + 648 = 0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} p + 2q = 1402 \\ p + 3q = 366. \end{cases}$$

De aci deducem

$$\begin{cases} p = 3474 \\ q = -1036. \end{cases}$$

Inlocuind aceste valori în ecuaţia dată obţinem

$$30x^6 - 133x^5 - 1273x^4 + 3474x^3 - 1036x^2 - 568x + 192 = 0.$$

Rezultă că ecuaţia dată, în afară de rădăcinele $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, admite şi rădăcinele ecuaţiei

(1) $$5x^4 - 18x^3 - 228x^2 + 392x + 192 = 0.$$

Dar prin ipoteză, rădăcinele acestei ecuaţii notate cu x_3, x_4, x_5, x_6 formează o diviziune armonică. Aceasta înseamnă că pe o dreaptă luând originea O şi fixând punctele A, B, C, D de abscise respectiv x_3, x_4, x_5, x_6, avem

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}, \quad \text{sau} \quad \frac{x_4 - x_3}{x_5 - x_4} = \frac{x_6 - x_3}{x_6 - x_5}.$$

Efectuând calculele în ultima egalitate, avem

$$2(x_3 x_5 + x_4 x_6) = x_5 x_6 + x_3 x_4 + x_3 x_6 + x_4 x_5,$$

sau

(2) $$2(x_3 x_5 + x_4 x_6) = (x_3 + x_5)(x_4 + x_6).$$

De altă parte, relaţiile cunoscute între rădăcinele şi coeficienţii unei ecuaţii, aplicate ecuaţiei (1) sunt

(3) $$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \frac{18}{5}, \\ (x_3 + x_5)(x_4 + x_6) + x_3 x_5 + x_4 x_6 = -\frac{228}{5}, \\ x_4 x_6 (x_3 + x_5) + x_3 x_5 (x_4 + x_6) = -\frac{392}{5} \\ x_3 x_4 x_5 x_6 = \frac{192}{5} \end{cases}$$

A 2-a relaţie din (3), în virtutea relaţiei (2), ne dă

$$x_3 x_5 + x_4 x_6 = -\frac{76}{5}.$$

Avem astfel

$$\begin{cases} x_3 x_5 + x_4 x_6 = -\frac{76}{5} \\ x_3 x_5 \cdot x_4 x_6 = \frac{192}{5}. \end{cases}$$

Rezultă că produsele $x_3 x_5$, $x_4 x_6$ sunt rădăcinele ecuaţiei

$$t^2 + \frac{76}{5}t + \frac{192}{5} = 0,$$

sau

$$5t^2 + 76t + 192 = 0,$$

de unde

$$t = \frac{-38 \pm \sqrt{1444 - 960}}{5} = \frac{-38 \pm 22}{5},$$

prin urmare putem lua

(4) $$x_3 x_5 = -\frac{16}{5}, \quad x_4 x_6 = -12.$$

Aceste valori le introducem în a 3-a din (3) şi obţinem

$$-12(x_3 + x_5) - \frac{16}{5}(x_4 + x_6) = -\frac{392}{5},$$

sau simplificând, găsim

$$15(x_3+x_5)+4(x_4+x_6)=98.$$

Ţinând seamă şi de prima relaţie din (3), putem scrie

$$\begin{cases} x_3+x_4+x_5+x_6=\dfrac{18}{5} \\ 15(x_3+x_5)+4(x_4+x_6)=98. \end{cases}$$

De aci deducem

$$x_3+x_5=\frac{18}{5},\quad x_4+x_6=-4.$$

Privind relaţiile (4) avem

$$(5)\quad \begin{cases} x_3+x_5=\dfrac{38}{5} \\ x_3x_5=-\dfrac{16}{5} \end{cases} \text{ şi } (6)\begin{cases} x_4+x_6=-4 \\ x_4x_6=-12. \end{cases}$$

Din (5) rezultă că x_3, x_5 sunt rădăcinile ecuaţiei,

$$5t^2-38t-16=0,$$

de unde

$$t=\frac{19\pm\sqrt{361+80}}{5}=\frac{19\pm 21}{5}$$

deci

$$x_3=8,\quad x_5=-\frac{2}{5}.$$

Din (6) rezultă că x_4, x_6 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$t^2+4t-12=0,$$

deci,

$$t=-2\pm 4,$$

prin urmare

$$x_4=2,\quad x_6=-6.$$

In rezumat, am găsit

$$p=3474,\quad q=-1036,$$

iar rădăcinele ecuaţiei date sunt,

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 8,\ 2,\ -\frac{2}{5},\ -6.$$

Soluţii date de d-nii: *Beschea Radu* (P. B.), *Chioreanu I.* (P. T.), *Dobrişan Alexandru* (P. T.), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gligor Ioan* (student), *Manolescu G.* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Stanciu M. Valeriu* (Lic. Militar Craiova), *Stan Petru* (P. T.), *Stern Tiberiu* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Liceul Matei Basarab Bucureşti), *Tincu C-tin* (P. T.) şi *Titero Ioan* (P. T.).

Problema 2429. — *Să se arate că,*

$$2\sin\frac{A+B}{3}\left(\sin\frac{A+B}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{A+B}{3}\right)=4\cos^2\frac{C}{3}-1,$$

dacă $A+B+C=180^0$.

MARIA MEUMANN

Soluţie. Din relaţia de condiţie deducem

$$\frac{C}{3}=60^0-\frac{A+B}{3}$$

şi prin urmare

$$\cos\frac{C}{3}=\frac{1}{2}\cos\frac{A+B}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{A+B}{3}.$$

Ridicând la patrat, obţinem

$$\cos^2\frac{C}{3}=\frac{1}{4}\cos^2\frac{A+B}{3}+\frac{3}{4}\sin^2\frac{A+B}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{A+B}{3}\cos\frac{A+B}{3},$$

sau,

$$\cos^2\frac{C}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{A+B}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{A+B}{3}\cos\frac{A+B}{3},$$

de unde

$$\cos^2\frac{C}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\frac{A+B}{3}\left(\sin\frac{A+B}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{A+B}{3}\right)$$

Inumulţind cu 4, găsim

$$4\cos^2\frac{C}{3}-1=2\sin\frac{A+B}{3}\left(\sin\frac{A+B}{3}+\sqrt{3}\cos\frac{A+B}{3}\right),$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Almaşan Lazăr*, (Liceul Piatra Neamţ), *Bălă C-tin* (P. T.), *Bălăuţă Mihai* (Lic Deva), *Balaniscu Chirică* (student, Cluj), *Beşchea Radu* (P. B.), *Blaga Ovidiu* (Lic. Cluj), *Bogza Mihai* (Roman), *Braşoveanu Gh.* (Craiova), *Cernescu Nicolae* (Col. Nic. Filpescu), *Chioreanu Ilie* (P. T.), *Ciucescu Paul* (Lic, Slatina), *Constantinescu Paul* (Col. Nic. Filipescu), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Corduneanu C-tin* (Col N Filipescu), *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina), *Crăciunescu Victor*, *Dăscălescu V. Mihai* (Liceul M. Viteazul Bucureşti), *Deutsch Emeric* (P. T.), *Gherlan Vasile* (Lic. Beiuş), *Ghersch Paul*, *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Gligor Ioan* (student), *Guttman Tiberiu* (Lic. Deva), *Haret Radu* (Bucureşti), *Ioncu Simion* (P. T.), *Manolescu Gh.* (P. T.), *Mâncescu Ion* (Col. N. Filipescu), *Mărcuţiu Silviu* (Cluj), *Marinescu D.* (Ploeşti), *Munteanu Ioan* (Col. N. Filipescu), *Nedelcu Ulpius* (Şc. Of. de Geniu, Bucureşti), *Novac Ioan* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Pantea Alexandru* (Lic. Beiuş), *Peţanca Dacia* (Bucureşti), *Pisanca Ionel* (Col. Loga, Timişoara), *Popa Vasile* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.), *Puşcaşiu Silviu* (P. T.), *Râmboiu Septimiu* (Lic. Cluj), *Ristea Gh.* (Liceul

Matei Basarab, București), *Roman C-tin* (Col. Loga, Timișoara), *Serengău Mihai* (P. T.), *Stan Petru* (P. T.), *Stanciu Olimpiu* (P. T.), *Stern Tiberiu* (P. T.), *Stroescu Florea* (Caracal), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București), *Tincu C-tin* (P. T.), *Turbuțiu Gh.* (Lic. Cluj) și *Târcomnicu C-tin* (Lic. Slatina).

PROBLEME PROPUSE

2546. — Să se găsească patratul de cinci cifre distincte, astfel ca numărul format de primele trei cifre să fie egal cu patratul sumei lor mai puțin 20.

IOSIF MAN

2547. — Se dau ecuațiile

$$x^2+\alpha x-3=0, \quad (\alpha+1)x^3-3x+2=0.$$

Să se determine rezultantul lor. Considerând ecuația ce se obține egalând rezultantul cu zero, se cere:

1°. Să se afle rădăcinele comensurabile.

2°. Să se determine numărul rădăcinelor incomensurabile.

3°. Să se calculeze rădăcinele incomensurabile cu două zecimale exacte.

E. ARGHIRIADE

2548. — Să se stabilească următoarea cuadruplă identitate,

$$c \operatorname{arc\,tg} i\frac{\sqrt[c]{A}-\sqrt[c]{Y}}{\sqrt[c]{A}+\sqrt[c]{Y}}=$$

$$a \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt[a]{A(1+iX)^b}-\sqrt[a]{Y(1-iX)^b}}{\sqrt[a]{A(1+iX)^b}-\sqrt[a]{Y(1-iY)^b}}+b \operatorname{arc\,tg} X$$

$$=m \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2i}\left(\sqrt[2m]{\frac{Y}{A}}-\sqrt[2m]{\frac{A}{Y}}\right)$$

$$=n \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}\left(\sqrt[2n]{\frac{Y}{A}}+\sqrt[2n]{\frac{A}{Y}}\right),$$

unde $i=\sqrt{-1}$, a, b, c, m, n, A constante date, X, Y funcții oarecare derivabile de variabila x.

V. ALACI

2549. — Se consideră un triunghiu ABC și o dreaptă Δ. Din A se duce o paralelă la BC care taie pe Δ în A′ și fie A_1 simetricul lui A′ față de A. Analog se determină punctele B_1 și C_1. Să se arate că punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

GH. TH. GHEORGHIU

2550. — În triunghiul oarecare BAC, înscris în cercul O, bisectoarea CE întâlnește cercul în punctul D. Fie S, a, b, c, respectiv, suprafața și laturile triunghiului BAC, iar s suprafața patrulaterului BDAO. Să se arate că,

$$s=\frac{abc^2}{8S}.$$

MAIOR G. P. BOERESCU

2551. — Un dreptunghiu are un vârf fix și două vârfuri mobile pe două drepte paralele. Care este locul vârfului al patrulea?

G-L. GH. BUICLIU

2552. — Se dă un cerc O, AB și CD respectiv un diametru orizontal și vertical, E mijlocul lui OC, FG coarda dusă prin E paralel cu AB. Tangenta la cerc în F întâlnește prelungirea diametrului vertical în H. Se duce raza FO prelungită; se duce în H perpendiculara HJ pe FH; se duce prin G perpendiculara comună pe FO, HJ, care intersectează în I pe FO prelungit. Se cere:

1°. Să se cerceteze dacă figura FHJI este un patrat.

2°. Să se determine poziția lui E pe OC astfel încât figura FHJI să fie un patrat.

VIRGIL GHITESCU

2553. — Să se elimine x între ecuațiile

$$\begin{cases} A\sin^2 x+B\sin x+C=0. \\ \sin^3 x-D=0. \end{cases}$$

LT. COL. EUGEN ȘT. IACOB

2554. — Se se demonstreze relația,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=1+p\sum\frac{a}{bc},$$

α, β, γ fiind unghiurile asociate într'un triunghiu oarecare ABC.

LT C-DOR C. V. COSTACHESCU

ERATĂ. La pag. 68 coloana a 2-a rândul 4 de jos, prima parte a egalității trebue înlocuită cu

$$(a,b)+[(c,d)+(e,f)].$$

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bota Valentin (2469, 2492); *Cioară Alexandru* (2497, 2499, 2506, 2507, 2509, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2521, 2522, 2523, 2524, 2530, 2531, 2535); *Georgian Nicolae* (2517, 2519); *Gherlan Vasile* (2416, 2450, 2475, 2491, 2496, 2507, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2518, 2519, 2522, 2523, 2524, 2530, 2531, 2535); *Iovănel Chiriac* (2493, 2532); *Man Octavian* (2476, 2491, 2493, 2499, 2522, 2523); *Neguţ Ionel* (N; P; 1571, 1708, 1714, 1842, 2018, 2036, 2531, 2522); *Novac Ioan* (P; 2529, 2530, 2531, 2532, 2535); *Ristea Gh.* (2118, 2362, 2424, 2493, 2512, 2513, 2515, 2519, 2535); *Stancu D-tru* (P; 2469, 2496, 2499, 2505, 2509, 2512, 2514, 2515, 2517, 2519, 2522, 2523, 2524, 2531, 2535); *Szekely G.* (2437, 2444, 2450, 2452, 2467, 2469); *Teodorescu Petre* (P; 2412, 2475, 2484, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2499, 2501, 2502, 2520, 2522, 2526, 2529, 2530, 2531, 2532, 2535, 2536).

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, şi nu în continuare.

3. Noile preţuri ale fascicolelor, apărute până în prezent, din cartea *67 examene de admitere la Politehnicele din România* sunt următoarele: fasc. I (168 lei), fasc. II (140 lei) şi fasc. IV (83 lei). Deasemeni *Probleme de algebră şi Analiză matematică* de acelaşi autor, Vol. I, (300 lei), Vol. (II 322 lei). La aceste preţuri se adaogă la fiecare comandă 30 lei expediţia; banii se trimet pe adresa *Gh. Th. Gheorghiu*, str. Harry Truman no. 1, Timişoara I, sau se depun la CEC sub contul no. 86405 specificându-se pe buletin natura comandei. Preţurile de mai sus rămân valabile până la o nouă anunţare în revistă.

4. *Stancu D. D-tru.* Pentru no. 1 şi 4 vă vom avea în vedere la sfârşitul anului în curs.

5. *Lic. Independenţa* (Calafat). La legarea colecţiei vă vom satisface cererea în privinţa no. 3. Noi am expediat no. la timp dar probabil că s'a pierdut prin poştă.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

Către Membrii și Abonați*).

Deoarece *Revista Matematică din Timișoara* își are asigurată existența ei prin contribuția membrilor și abonaților, credem de cuviință să le aducem la cunoștință următoarele.

Când am luat în primire Administrația revistei, în 15 Iunie a. c., am găsit drept fonduri suma de 3.759.000 lei. Intre timp, grație subvențiilor primite dela Ministerul Educației Naționale, dela Politehnica din Timișoara, dela alte persoane anunțate în revistă, precum și prin plata abonamentelor restante, până la 15 August am incasat suma de 113.144.000 lei. Din această sumă am plătit tiparul a trei numere, am cumpărat hârtia necesară numerelor 7—12 ale revistei și mai aveam la data de mai sus, suma de 60.925.000 lei, sumă care ne asigura apariția revistei până la sfârșitul anului în curs. Așa se explică că în numărul 6 am anunțat abonații cu plata la zi, că nu li-se vor mai face nici un spor asupra abonamentului.

Dela această dată, situația însă s'a schimbat. Prin stabilizarea monedei, fondurile revistei sunt astăzi în valoare de 3.045 lei (stabilizați) în timp ce tipărirea unui număr al revistei costă cca 7.500lei. In felul aceasta apariția revistei este din nou periclitată. Din aceasta cauză am fost nevoiți să ridicăm prețul abonamentului la 250 lei anual (în care intră și expediția) iar taxa de membru la 200 lei. *Abonații și membrii care sunt cu plata abonamentului la curent* (150.000 lei vechi) *și cu cotizația la zi* (120.000 lei vechi) *nu vor mai plăti decât jumătate din aceste sume.* In consecință Dvoastă vă rugăm să ne trimiteți suma de lei..... pentru cotizațiile restante, și lei..... drept nouă contribuție la abonament și taxa de membru anual; în total ne veți trimite suma de lei.....
Orice sporire a acestei sume prin contribuții benevole va fi anunțată în revistă. Având în vedere situația excepțională, anul acesta vom face și abonamente pe jumătate de an, dela Nr. 7 înainte, numere rămase descomplectate prin neplata abonamentului a unora dintre abonați. Din această cauză vă rugăm, dacă doriți să rămâneți abonat al revistei, să ne trimiteți sumele de mai sus până cel mai târziu la 15 Octomvrie a. c. La primirea banilor vi se va expedia imediat numerele din revistă restante, până la zi. Celor ce nu vor trimite sumele anunțate până la data de mai sus, nu le mai putem garanta trimiterea revistei și deci riscă să-și descomplecteze colecția. (Orice sume datorate revistei pot fi depuse la CEC cont 85208, sau se trimit pe adresa de mai jos).

Rugăm pe toți cari apreciază munca și sforțările noastre pentru a asigura existența unei opere științifice, să ne dea contribuția cerută mai sus, și să răspândească revista mai departe.

Gh. Th. Gheorghiu
Profesor la Politehnica din Timișoara
str. Harry Truman Nr. 1, Timișoara I.

*) Această circulară a fost trimeasă tuturor membrilor și abonaților cu contul fiecăruia.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

ANUL XXVII. OCTOMVRIE 1947 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREŢUL ABONAMENTULUI ESTE 250 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ŞI 500 LEI PENŢRU INSTITUŢII
PREŢUL ABONAMENTULUI PENTRU STRĂINĂTATE ESTE DE 500 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **GH. TH. GHEORGHIU**: ARTICOL DE METODOLOGIE. (URMARE)
2. **E. ARGHIRIADE**: ASUPRA REGULEI LUI HOSPITAL.
3. NOTE MATEMATICE 17-18.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 440, 1543, 1554, 1667, 1717, 1718, 1833, 1854, 1979, 2086. 2249, 2293.
6. PROBLEME PROPUSE: 2555-2561.
7. ERATA.
8. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timişoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

S'au primit următoarele contribuţii dela D-nii: L-t C-dor **C. Chiriac** a transformat donaţia benevolă a d-sale în 50 lei lunar (lei stabilizaţi); **Blaga Ov.**, 100 lei; **Turbuţiu Gh.**, 100 lei; C-pt C-dor **C V. Costăchescu**, 75 lei; **P. P. Teodorescu** 50 lei. Tuturor le mulţumim.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci**, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Începând cu data de 15 Septembrie, costul abonamentului pe anul în curs este de 250 lei pentru particulari, şi de 500 lei pentru instituţii. În această sumă intră şi expediţia revistei.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV şi XXVI sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 3 lei la care se adaogă 2 lei expediţia.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Harry Truman, Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — No. 8. TIMISOARA, OCTOMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 250 lei pentru particulari și 500 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Harry Truman No. 1.

ARTICOL DE METODOLOGIE

DE

GH. TH. GHEORGHIU.

(Urmare)

8. Am citit undeva următoarea demonstrație pentru formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ținând seamă de valorile diferitelor puteri ale lui i și cum seria ce reprezintă pe e^{ix} este absolut convergentă pentru orice valoare a lui x, putem scrie

$$(8)\quad e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

$$+ i\left[\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] + \cdots$$

$$= \cos x + i \sin x.$$

Să-mi fie permis ca făcând critica acestei demonstrații să dăm demonstrația corectă, mergând pe calea indicată [4], căutând totodată de a face câteva precizări în legătură cu calculul asupra seriilor.

Afirmația că deoarece seria lui e^{ix} este absolut convergentă, putem scrie egalitatea (8), este eronată. În adevăr, există o teoremă celebră care spune că *într'o serie absolut convergentă putem schimba ordinea termenilor* fără ca suma seriei să se schimbe Căutați într'o carte și vedeți demonstrația aceste teoreme, demonstrația clasică care este aceeași peste tot. Ea se bazează pe faptul că schimbând ordinea termenilor, fiecare termen capătă un indice, adică are un rang, adică mai precis i se poate spune locul unde se găsește în noua serie. Să privim acum egalitatea (8). În prima serie termenul $\frac{ix}{1!}$ are rangul 2, dar în a doua? El este așezat după o infinitate de termeni, adică nu se poate spune al câtelea, adică nu are un rang în serie! Teorema menționată nu este deci aplicabilă [5].

Scriind egalitatea de mai sus sub forma

$$\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

$$+ i\left[\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right]$$

$$= \left[1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \cdots + \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

$$+ \left[\frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right]$$

avem deaface cu suma a două serii. Cum ambele aceste serii sunt convergente, suma lor este egală cu suma seriei

$$(9)\quad \left(1 + \frac{ix}{1!}\right) + \left[\frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!}\right] + \cdots$$

$$+ \left[\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] + \cdots$$

deoarece $\Sigma u_n + \Sigma v_n = \Sigma(u_n + v_n)$. Dacă ne grăbim, am putea spune că lăsând parantezele deoparte, am ajuns la seria lui e^{ix}, deci... Avem voie să facem acest lucru? Cu alte cuvinte, mai precis, seria

$$(10)\quad (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) + \cdots$$

este tot una cu seria

---

[4] După părerea mea, cea mai simplă demonstrație se bazează pe teorema care spune că suma unei serii cu termeni complexi $\Sigma(\alpha_n + i\beta_n)$ este un număr complex a cărui parte reală este $\Sigma\alpha_n$, iar coeficientul lui i este $\Sigma\beta_n$.

[5] Probabil că această teoremă este valabilă și cu acest corectiv, dar în acest caz necesită o altă demonstrație pe care nu am întâlnit'o în cărțile obișnuite.

(11) $u_1+v_1+u_2+v_2+\cdots+u_n+v_n+\cdots$?

Un exemplu ne va lămuri imediat. Să considerăm seria

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

care este bine cunoscută şi ştim că este convergentă. Ea se mai poate scrie sub forma

$$\left(\frac{2}{1}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)+\cdots$$

unde lăsând parantezele deoparte, obţinem seria

$$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}+\cdots$$

manifest divergentă deoarece termenul general al seriei nu tinde către zero!

Să presupunem deci că seria (10) ar fi convergentă şi să vedem în ce caz seria (11) este şi ea convergentă şi are aceeaşi sumă cu cea dela care am plecat. Fie w_n termenul general al seriei (10) şi w'_n termenul general al seriei (11), adică

$$w_n=u_n+v_n,\quad w'_{2n}=v_n,\quad w'_{2n+1}=u_n.$$

Prin ipoteză prima serie este convergentă şi are o sumă S, adică punând

$$S_n=w_1+w_2+\cdots+w_n,$$

avem

$$\lim_{n=0} S_n=S,$$

oricum ar tinde n către infinit (bineînţeles prin valori întregi). Pentru a doua serie punând

$$S'_{2n}=w'_1+w'_2+\cdots+w'_{2n}=S_{2n},$$

$$S'_{2n+1}=w'_1+w'_2+\cdots+w'_{2n+1}=S_{2n+1}+u_n,$$

avem

$$\lim_{n=\infty} S'_{2n}=\lim_{n=\infty} S_{2n}=S$$

$$\lim_{n=\infty} S'_{2n+1}=\lim_{n=\infty} S_{2n+1}+\lim_{n=\infty} u_n=S+\lim_{n=\infty} u_n$$

şi deci, vom avea $\lim S_n=S$ oricum ar tinde n către infinit, dacă

$$\lim_{n=\infty} u_n=0.$$

În particular, cum seria iniţială este convergentă, va trebui ca

$$\lim_{n=\infty} w_n=\lim_{n=\infty}(u_n+v_n)=0,$$

adică avem şi

$$\lim_{n=\infty} v_n=0.$$

Aceste condiţii sunt îndeplinite în ipoteza că seria (10) este suma a două serii convergente. În particular în relaţia (9) putem lăsa parantezele deoparte şi seria obţinută va reprezenta pe e^{ix}.

Mă opresc aci rămânând să mai revin cu altă ocazie. Înainte de a încheia e bine să facem o observare. Toate chestiunile de mai sus sunt de *algebră*. Şi nu este de mirare, căci în general în această parte a matematicei suntem obişnuiţi să lăsăm deoparte raţionamentele, păstrând în general numai partea mecanică a calculului. De aceea ne place să lucrăm în special probleme de *algebră*, deoarece cele de *geometrie* cer mai mult raţionament. Chiar când avem de rezolvat asemenea probleme recurgem la *geometria analitică* care în fond nu este decât o traducere algebrică a faptelor geometrice.

Acest lucru nu este bun. Nu vreau să scad importanţa calculului în matematică deorece îmi dau seama de necesitatea lui. Mai mult, un calcul condus cu măiestrie, este o adevărată artă. Să nu uităm însă niciodată *raţionamentul*, căci matimatica este prin esenţă, şi trebue să rămână, *raţionament*.

ASUPRA REGULEI LUI HÔSPITAL

DE

E. ARGHIRIADE

Se ştie cât este de greu a da unor teoreme de Algebră Superioară, o demonstraţie riguroasă şi care să nu depăşească domeniul elementar. Putem spune că aceasta se realizează numai în mod excepţional, regula fiind de a sacrifica fie rigoarea matematică în folosul simplicităţii, fie invers simplicitatea în folosul rigoarei matematice. Aceste observaţiuni se desprind cu evidenţă, când examinăm demonstraţiile date de diverşi autori, teoremelor din Algebra de cl. 7-a ştiinţifică: aproape la fiecare teoremă autorul are de făcut o alegere între o demonstraţie simplă şi sugestivă dar fără suficientă rigoare, şi între o demonstraţie, care

pentru a fi mai corectă, părăseşte domeniul elementar pentru a face apel la cunoştinţe care depăşesc Programa Analitică. Una din teoremele în care sforţarea de a împăca aceste cerinţe contrarii apare mai vizibil, este regula lui *Hôspital*. Cred că este instructiv, şi aceasta nu numai pentru autorii de manuale didactice dar pentru toţi cunoscătorii de matematică, de a face o trecere în revistă a incercărilor diferiţilor autori de a da o *demonstraţie elementară* regulei lui *Hôspital* şi a examina în ce măsură au reuşit.

Să reamintim mai întâi cum se demonstrează corect regula lui *Hôspital*. Considerăm funcţiunile $f(x)$ şi $g(x)$ cărora le aplicăm *formula lui Cauchy* sau *formula generală a mediei*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta g)}{g'(a+\theta h)} \qquad (0<\theta<1)$$

presupunând bine înţeles că funcţiunile $f(x)$ şi $g(x)$ verifică condiţiunile pentru aplicarea formulei lui *Cauchy*. Dacă avem $f(a)=g(a)=0$, atunci fracţiunea $\frac{f(x)}{g(x)}$ se prezintă pentru $x=a$, sub forma $\frac{0}{0}$ şi formula lui *Cauchy* devine:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}.$$

Când $h\to 0$, avem:

$$(1) \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

dacă raportul derivatelor tinde către o limită, formula precedentă ne arată că raportul funcţiunilor tinde către aceiaş limită. Am obţinut astfel *regula doua a lui Hôspital*[1]: *Considerăm fracţiunea* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *care pentru* $x=a$ *ce se prezintă sub forma* $\frac{0}{0}$; *dacă raportul derivatelor tinde către o limită când* $x\to a$, *raportul funcţiunilor va tinde către aceiaş limită*. Reciproca nu este adevărată; dacă raportul funcţiunilor tinde către o limită, nu urmează neapărat că raportul derivatelor va tinde către aceiaşi limită. Într'adevăr în membrul al doilea al formulei (1) cantitatea θh tinde către zero după o lege necunoscută şi se poate întâmpla ca primul membru al formulei (1) să tindă către o limită, fără ca raportul derivatelor să tindă către o limită.

Regula doua a lui *Hôspital* se poate deci scrie:

$$\boxed{\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}\;; \qquad f(a)=g(a)=0$$

Să presupunem că funcţiunile $f'(x)$ şi $g'(x)$ sunt continui şi că $g'(a)\neq 0$. Avem, scriind că limita unui cât este egală cu cătul limitelor şi ţinând seama de proprietăţile funcţiunilor continui:

$$\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\lim f'(x)}{\lim g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

deci

$$(2) \qquad \boxed{\lim_{x=a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}}\;; \qquad f(a)=g(a)=0$$

formulă care constitue *prima regulă a lui Hôspital*[2] *Considerăm raportul* $\frac{f(x)}{g(x)}$, *care pentru* $x=a$ *are forma* $\frac{0}{0}$. *Limita raportului funcţiunilor când* $x\to a$ *este egală cu raportul derivatelor, calculate pentru* $x=a$.

Să observăm că regula întâia a lui *Hôspital* nu se poate aplica *decât dacă numerile* $f'(a)$ *şi* $g'(a)$ *nu sunt nule sau infinite în acelaş timp.*

Majoritatea autorilor de manuale didactice, nu folosesc această demonstraţie, deoarece întrebuinţează formula lui *Cauchy* care nu e prevăzută de Programa Analitică. Toţi autorii care încearcă o demonstraţie elementară a acestei reguli, procedează în felul următor. Considerăm relaţiile:

$$f(a+h)-f(a)=h[f'(a)+\varepsilon]$$
$$g(a+h)-g(a)=h[g'(a)+\varepsilon]$$

funcţiunile $f'(x)$ şi $g'(x)$ fiind presupuse continui, dacă $h\to 0$ atunci şi ε şi ε' tind tot către zero. Presupunem $f(a)=g(a)=0$; şi avem:

$$(3) \qquad \frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a)+\varepsilon}{g'(a)+\varepsilon}$$

să facem $h\to 0$ şi să presupunem $g'(a)\neq 0$. Avem scriind că limita unui raport este egală cu raportul limitelor, şi că limita unei sume este egală cu suma limitelor:

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h=0}\frac{f'(a)+\varepsilon}{g'(a)+\varepsilon'}=\frac{\lim[f'(a)+\varepsilon]}{\lim[g'(a)+\varepsilon']}=$$

(1) *De la Vallée Poussin*. Cours d'Analyse, 1923, p 93.

(2) loc. cit. p. 92.

$$= \frac{f'(a) + \lim \varepsilon}{g'(a) + \lim \varepsilon'}.$$

Când $h \to 0$, atunci ε şi ε' tind către zero, iar

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

adică prima regulă a lui *Hôspital*. Prin urmare demonstraţia elementară a regulei lui *Hôspital*, *demonstrează prima regulă* şi *nu pe cea de a doua*.

Vom examina acum un număr de 7 manuale didactice, pe care le vom împărţi în 4 grupe. In grupa întâia vom considera două manuale: primul este de D-nii *O. Ţino*, *V. Bădulescu* şi *Teohari*, iar al doilea manual este de D-l *N. Ciorănescu*. In grupa doua considerăm manualul D-lui *A. Hollinger*. In grupa treia manualul D-lor *I. Stamatescu* şi *I. Focşa*. In grupa patra considerăm manualul lui *N. Abramescu* precum şi altele două datorite D-lor *P. Marinescu* şi *D. Dănescu*.

Manualele din grupa întâia demonstrează regula lui *Hôspital* cu ajutorul formulei lui *Cauchy*. Se dă deci o demonstraţie riguroasă şi singura obiecţiune ce se poate ridica este că se face apel la formula lui *Cauchy*, care nu e prevăzută de Programa Analitică.

Să trecem la grupa doua. D-l *A. Hollinger* dă regulei lui *Hôspital*, demonstraţia elementară pe care am indicat-o mai sus şi enunţă corect *regula întâia a lui Hôspital*. Apoi în toate aplicaţiunile, întrebuinţează sistematic, contrar tuturor celorlalţi autori, regula întâia în loc de cea de a doua. Demonstraţia D-lui *Hollinger* este riguroasă şi simplă; s'ar părea că constitue soluţia pedagogică a problemei, dacă n'ar interveni ulterior, o anumită dificultate. Această dificultate apare când vrem să domonstrăm că regula lui *Hôspital* se aplică şi la forma nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$. Se ştie că există pentru aceasta, o demonstraţie riguroasă, datorită lui *J. Tannery* şi care se află reprodusă atât în tratatul de Algebră de *Niewenglowsky* (vol. II. 1921, pag. 115) cât şi în Précis d'Algèbre de *G. Papelier* (ediţia 1923, pag. 209), dar această demonstraţie e destul de complicată şi nu poate fi vorba de a o întroduce într'un manual de cl. 7-a. Se demonstrează atunci o teoremă mai puţin cuprinzătoare şi anume se presupune că atât raportul funcţiunilor, cât şi raportul derivatelor au o limită

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{g(x)} = l; \quad \lim_{x=0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l'; \quad f(a)=\infty; g(a)=\infty$$

şi se arată că aceste limite sunt egale. Iată cum se demonstrează aceasta. Punem:

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)}; \quad g(x) = \frac{1}{g_1(x)} \text{ şi deci } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g_1(x)}{f_1(x)}$$

şi raportul $\frac{g_1(x)}{f_1(x)}$ devine $\frac{0}{0}$ pentru $x = a$. Putem deci să-i aplicăm regula lui *Hôspital*. Se naşte întrebarea, care regulă o putem aplica, prima sau a doua? Ori avem

$$f_1'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \qquad g_1'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

şi raportul derivatelor

$$\frac{g_1'(x)}{f_1'(x)}$$

devine $\frac{0}{0}$ pentru $x = a$ şi deci nu putem aplica regula întâia, căci după o observaţie făcută anterior, pentru a putea aplica formula (2), trebue ca numerile $f_1'(a)$ şi $g_1'(a)$ să nu fie nule în acelaş timp, ceia ce e tocmai cazul în problema de faţă. Deci rezolvarea cazului $\frac{\infty}{\infty}$ nu se poate face decât cu regula doua a lui *Hôspital*. Iată deci care este *dilema din care nu poate eşi autorul unui manual de Algebră de cl. 7-a; pe cale elementară nu se poate demonstra corect decât regula întâia a lui Hôspital, iar cazul* $\frac{\infty}{\infty}$ *nu se poate demonstra corect decât cu regula doua*. Ajungând la cazul $\frac{\infty}{\infty}$ şi neputând să-l demonstreze corect numai cu regula întâia, D-l *Hollinger* e nevoit să-l admită fără demonstraţie. D-sa spune textual: „şi în cazul $\frac{\infty}{\infty}$, regula lui *Hôspital* este aplicabilă. Demonstraţia acestui adevăr ne-ar duce prea departe". Deci punctul de vedere adoptat de D-l *Hollinger*, care e foarte avantajos în cazul $\frac{0}{0}$, prezintă o lacună în cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Fiecare va aprecia după preferinţele sale personale, în ce măsură avantagiile din primul caz, compensează dezavantagiile din cazul al doilea.

Să trecem la grupa treia: aici dilema de care vorbeam mai sus apare şi mai puternic în evidenţă. Autorii dau demonstraţia elementară menţionată mai sus şi enunţă corect regula întâia lui *Hôspital*, dar când trec la cazul $\frac{\infty}{\infty}$, aplică regula doua. Deci se demonstrează regula întâia dar la cazul $\frac{\infty}{\infty}$ precum şi în toate aplicaţiile, se aplică

regula doua. Se demonstrează deci o regulă şi se aplică alta.

La grupa patra lucrurile sunt ceva mai complicate. Iată demonstraţia dată: După ce se stabileşte ca mai sus formula (3), se adaogă (citäm textual):

Când $h \to 0$, avem:

$$\lim \frac{f(a)}{g(a)} = \lim \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{4}$$

deci

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{5}$$

şi se enunţă apoi regula doua a lui *Hôspital*. Lăsând la o parte faptul că o expresie ca $\lim \frac{f(a)}{g(a)}$ nu are niciun sens, deoarece limita unei funcţiuni trebue considerată atunci când variabila tinde şi ea către o limită şi aici nu se vede care e variabila deoarece a este o constantă, este evident că formulele (4) şi (5) nu sunt consecinţe ale formulei (3), ei sunt scrise în mod arbitrar. Se dă o demonstraţie care riguros nu conduce decât la regula întâia, şi la urmă se forţează puţin lucrurile şi în mod neriguros se enunţă regula doua Deci procedeul întrebuinţat este următorul: se demonstrează o regulă şi se enunţă cealaltă. Să nu se bănuiască că ar exista din partea noastră o intenţiune polemică. Demonstraţia autorilor români nu e originală; ea e luată din autori francezi. Nu putem preciza de unde anume au luat-o, dar putem menţiona că am găsit această demonstraţie şi cu acelaş final de a demonstra o regulă şi a anunţa pe cealaltă, în vechea Algebră a lui *J. Bertrand* (1889 pag. 125).

Din toate cele de mai sus rezultă o concluzie: nu se poate da pe cale elementară o demonstraţie satisfăcătoare regulei lui *Hôspital*. După ce am căutat să scoatem în evidenţă acest lucru, ne permitem o sugestie pe care o adresăm forurilor în drept. Credem că ar fi bine să se rupă aici cu vechile programe şi să se întroducă în programa de cl. 7-a formula lui *Cauchy* şi corolarul ei formula creşterilor finite, a căror demonstraţie nu e grea, nefiind decât o aplicaţie a teoremei lui *Rolle* In felul acesta s'ar câştiga următoarele:

1) se poate studia mai frumos legătura dintre creşterea unei funcţiuni şi semnul derivatei.

2) se poate demonstra teorema: „dacă derivata unei funcţiuni e nulă, funcţiunea e egală cu o constantă", teoremă care de obicei se admite fără demonstraţie.

3) se poate da o prezentare satisfăcătoare regulei lui *Hôspital*.

NOTE MATEMATICE

17 — *Asupra articolului al 3-lea din n-rul 7 al „R. M. T." pag. 82.*

In formulele (4) şi (6), $\sqrt{2}$ trebuie înlocuit prin 2; iar formulele ultime din *Problema 1*, trebuiesc scrise corect, astfel:

$$b = \frac{2\,a\,sp\,\beta \sin(45^0+\beta)\sin(45^0+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}, \qquad c = \frac{2\,a\,sp\,\gamma \sin(45^0+\beta)\sin(45^0+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}. \tag{1}$$

Cunoscând însă relaţia

$$sp\,\beta = \frac{\sin\beta}{\sin\beta+\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}\sin(45^0+\beta)}$$

şi analog pentru γ, relaţiile (1) se pot scri mai simplu în forma următoare

$$b = \frac{\sqrt{2}\sin\beta\sin(45^0+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)}, \quad c = \frac{\sqrt{2}\sin\gamma\sin(45^0+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)}.$$

Şi formula (6) se poate scrie mai simplu şi corect sub forma

$$c = \frac{a\cos(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}\sin\alpha\sin(45^0+\beta)}.$$

V. ALACI

18. — *Câteva proprietăţi ale conicelor.*

Se cunoaşte teorema: I. *Unghiul sub care se vede din focarul unei conice porţiunea dintr'o tangentă variabilă cuprinsă între două tangente fixe, este egal cu jumătatea unghiului sub care se vede din acelaş focar porţiunea din directoarea corespunzătoare cuprinsă între cele două tangente fixe.* Ea se poate căpăta foarte uşor transformând prin polare reciproce figura formată de un cerc, un unghi la centru A C B şi un unghi înscris A D B cuprinzând acelaş arc între laturile lor.

Dacă în locul razelor AC şi BC considerăm tan-

gentele AT şi BT, care, şi ele, ne dau un unghi egal cu dublul unghiului ADB, transformarea prin polare reciproce ne conduc la o serie de propoziţii interesante prin simplicitatea enunţului lor şi pe care nu le-am găsit în tratatele clasice asupra secţiunilor conice.

1. Să luăm ca origină a transformării un punct oarecare O în plan. Cercul (C) se transformă într'o conică (Γ), O fiind unul din focare.

Punctele A, B, D, devin trei tangente, α, β, δ, ale căror puncte de contact le însemnăm cu a, b, d. Fie E intersecţia (α, δ) şi F intersecţia (β, δ). E şi F sunt polii dreptelor AD şi BD; deci $\sphericalangle EOF = \sphericalangle ADB$. a şi b sunt polii tangentelor AT şi BT; deci $\sphericalangle aOb = \sphericalangle ATB$ (sau $\sphericalangle A'TB$). Cum $\sphericalangle A'TB = 2\sphericalangle ADB$, putem enunţa teorema generală:

II. *Unghiul, sub care se vede din focarul unei conice oarecare porţiunea dintr'o tangentă variabilă cuprinsă între două tangente fixe, este jumătate din unghiul, sub care se vede din acelaş focar coarda contactelor celor două tangente fixe.*

Comparând teoremele (II) şi (I) deducem corolarul (III). *Două tangente oarecari la o conică determină pe o directoare un segment de dreaptă, care este văzut din focarul corespunzător sub un unghi egal cu unghiul sub care se vede coarda contactelor din acelaş focar.*

2. Dacă luăm originea chiar în D, conica (Γ) devine o parabolă având punctul D ca focar. α şi β fiind acum perpendiculare pe DA şi DB, $\sphericalangle(\alpha, \beta) = \sphericalangle ADB$, iar aD şi bD fiind perpendiculare pe AT şi BT, $\sphericalangle aDb = \sphericalangle A'TB$. Se poate deci, enunţa teorema:

(IV) *Unghiul format de două tangente oarecari la o parabolă este egal cu jumătatea unghiului sub care se vede din focar coarda contactelor.*

3. Dacă luăm ca origine un punct oarecare al cercului (C) obţinem pentru parabolă teorema enunţată, în general, sub (III). Din compararea teoremelor (III) şi IV) deducem încă:

(V) *Două tangente oarecari la o parabolă determină pe directoare un segment, care este văzut din focar sub un unghi egal cu dublul unghiului format de cele două tangente.*

PETRE B. BOLDESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LII, No. 13, Septembrie, 1947. Lista membrilor Soc. Gazeta Matematică. Asupra amortizării împrumuturilor de *V. V. Mehedincu*. Concursul G. M. din 1948. Raport pentru acordarea premiului G-l. *Sc. Panaitescu*. Probleme rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 440. — *Fiind date triunghiurile* ABC *şi* A_1B_1C, *de aceiaşi arie, să se probeze că există în planul lor un punct* D *astfel ca ariile* $DAB = DA_1B_1$, $DAC = DA_1C$, $DBC = DB_1C$ *şi să se arate că dreptele* AA_1 *şi* BB_1 *sunt paralele.*

N. ABRAMESCU

Soluţia. Fie x, y distanţele punctului D la laturile AB, A_1B_1. Conform primei relaţii, va trebui să avem $x \cdot AB = y \cdot A_1B_1$. Locul geometric al punctelor D din plan care satisfac acestei relaţii, se ştie că este o dreaptă care trece prin punctul O de intersecţie al dreptelor AB, A_1B_1. In particular această dreaptă va trece şi prin C deoarece prin ipoteză triunghiurile date au aceiaşi arie. Analog, locul punctelor D care satisfac celorlalte două relaţii va fi format din câte o dreaptă, ambele trecând prin C punctul comun dreptelor (AC, A_1C), (BC, B_1C). Punctul comun acestor trei locuri va corespunde problemei. Ori acest punct nu este altul decât punctul C. In general, problema este deci banală. In ceiace priveşte paralelismul dreptelor AA_1, BB_1, proprietatea nu este necesară deoarece oricare ar fi poziţia triunghiurilor date, cele arătate mai sus sunt adevărate.

Există însă un caz particular interesant pe care probabil l'a avut în vedere autorul: cazul când cele trei locuri se confundă. In acest caz orice punct D al dreptei OC răspunde problemei. In particular, chiar punctul O; adică va trebui să avem relaţiile între arii $OAC = OA_1C$, $OBC = OB_1C$. Dacă însemnăm cu m şi n distanţele lui C la dreptele OAB şi OA_1B_1 aceste relaţii ne spun că $m \cdot OA = n \cdot OA_1$ şi $m \cdot OB = n \cdot OB_1$ relaţii care împărţite dau $OA : OB = OA_1 : OB_1$ adică dreptele AA_1 şi BB_1 sunt paralele.

Gh. Th. Gh.

Problema 1543 — *Se consideră o sferă şi pe ea un cerc determinat de un plan secant dus la o distanţă a de centrul sferei. Să se determine a astfel ca volumul cuprins între sferă şi semisfera exterioară descrisă pe cercul de secţiune să fie maxim.*

D. GEORGESCU

Soluţia. Cum raza cercului de secţiune este $\sqrt{R^2-a^2}$, volumul semisferei descrisă pe cercul de secţiune va fi $\frac{2}{3}\pi\sqrt{(R^2-a^2)^3}$, iar al calotei sferice, $\frac{2}{3}\pi R^3+\frac{1}{3}\pi a^3-\pi a R^2$. Volumul al cărui maxim îl căutăm este deci

$$V=\tfrac{1}{3}\pi\left\{2(R^2-a^2)^{\frac{3}{2}}-(R-a)\left[2R^2-a(R+)a\right]\right\}.$$

Derivata acestei funcţiuni în raport cu a este

$$V'=\pi\sqrt{R^2-a^2}\left[\sqrt{R^2-a^2}-2a\right]=$$

$$=\pi\frac{\sqrt{R^2-a^2}(R^2-5a^2)}{\sqrt{R^2-a^2}+2a}$$

şi care se anulează pentru $a=R/\sqrt{5}$, $a=R$ (lăsând deoparte valorile negative). A doua valoare nu este interesantă căci dă minimul $V=0$. Semnul derivatei în vecinătatea primei valori ne spune că pentru ea, V are un maxim a cărui valoare este

$$\frac{2\pi R^3}{3\sqrt{5}}(3-\sqrt{5}).$$

Soluţii date de D-ra *Cor. Comloşan* (Cluj) şi de d-nii *A. Ripianu* (Cluj), *Şt. C. Tilică* (T. Severin) şi S-lt. *M. C. I. Vlad.*

Gh. Th Gh.

Problema 1554. — *Să se determine un pătrat de cinci cifre de forma aabbc.*

A. GLODEN

Soluţie dată de D-l *Eug. Wegener* (Bucureşti). In G. M., vol. 35, pag. 134 s'au dat ultimele patru cifre ale unui pătrat perfect. Folosind acest tablou se găsesc soluţiile: $11449=107^2$, $11664=108^2$, $11881=109^2$, $55225=235^2$ şi $99225=315^2$.

Alte soluţii date de d-nii: *C. Bakonyi*, *P. F. Ionescu*, *A. Ripianu* şi *Şt. Tilică*. Celelalte soluţii primite nu sunt complecte.

Gh. Th. Gh.

Problema 1667. — *Să se construiască şi să se rezolve un triunghiu dreptunghic, cunoscând proiecţiile simedianei unghiului drept pe cele două catete. Car particular: $m=4$, $n=3$.*

CERCHEZ MIHU

Soluţia. Fie AD înălţimea unghiului drept. Avem $c^2=a\,DB$, $b^2=a\,DC$, încât $DB:DC=c^2:b^2$ adică înălţimea este şi simediană. Ţinând seamă de această observare construcţia este imediată: se consideră un dreptunghiu cu laturile m şi n; perpendicular pe una din diagonale într'un vârf ducem o dreaptă care împreună cu laturile dreptunghiului ce pleacă din vârful opus formează triunghiul căutat.

Fie $AM=m$ şi $AN=n$ proiecţiile lui AD respectiv pe AB şi AC. Din triunghiul dreptunghiu ADM scoatem

$$AD^2=m^2+n^2.$$

Mai departe, cum $AD^2=AB\,.\,AM$, rezultă

$$AB=\frac{m^2+n^2}{m}\quad\text{şi analog}\quad AC=\frac{m^2+n^2}{n}.$$

Teorema lui *Pitagora* dă mai departe

$$BC=\frac{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}{mn}.$$

Pentru unghiuri avem

$$\operatorname{tg}B\frac{AC}{AB}=\frac{m}{n},\qquad \operatorname{tg}C=\frac{AB}{AC}=\frac{n}{m},$$

iar pentru suprafaţă

$$S=\frac{1}{2}AB\,.\,AC=\frac{(m^2+n^2)^2}{2mn}.$$

În cazul particular din enunţ se găseşte

$$a=\frac{125}{12},\quad b=\frac{25}{4},\quad c=\frac{25}{3},\quad S=\frac{625}{24},$$

$$B=53^0\,7'\,49'',\quad C=36^0\,52'\,11''.$$

Soluţii primite dela D-nii: *Minea V. Aldea*, *Dinu D. Buznea*, *M. S. Cherţman*, *N I. Cristea*, *Hr. Şt. Dăscălescu*, *I. D. Diaconescu*, *Gh. I. Dragon*, *S-lt. I. Enache*, *C. I. Jidanu*, *Em S. Modâlcă*, *I. I. Stamate*, *S-lt. Marin Ştefănescu*, *Şt. C. Tilică* şi *Eug. Wegener*.

Gh Th. Gh.

Problema 1717. — *Prin O, depe dreapta xx', se duce semidreapta $OA=l$ făcând un unghiu α cu $x'x$. Să se determine unghiul β pe care tre-*

bue să-l facă semidreapta OB=2*l cu* OA *pentruca cercul circumscris triunghiului* AOB *să fie tangent în* O *dreptei* $x'x$. *Relaţia care determină pe* β *este*

$$\sin(\beta+\alpha)=2\sin\alpha.$$

Între ce limite poate varia α *pentruca să existe soluţie. Caz particular când* $\alpha=30^0$.

A. COMAN

Soluţia. Condiţia impusă de problemă se traduce prin relaţia $\sphericalangle ABO=\sphericalangle AOx=\alpha$. In cazul acesta din triunghiul AOB scoatem

$$\frac{l}{\sin\alpha}=\frac{2l}{\sin[180^0-(\alpha+\beta]}; \quad \sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha,$$

care este relaţia ce determină pe β în funcţie de α. Pentruca această relaţie să fie posibilă trebue ca partea dreaptă care reprezintă un sinus (prima parte) să fie subunitară, adică

$$-1\leqq 2\sin\alpha\leqq 1 \quad \text{sau} \quad -\frac{1}{2}\leqq\sin\alpha\leqq\frac{1}{2}.$$

Reprezentând pe un cerc trigonometric arcele de 30^0, 150^0, 210^0 şi 330^0 pentru cari sinusul este $\pm\frac{1}{2}$ se constată că trebue să luăm $0\leqq\alpha\leqq 30^0$, sau $150^0\leqq\alpha\leqq 210^0$, sau $330^0\leqq\alpha\leqq 360^0$. Pentru $\alpha=30^0$ vom avea $\sin(\alpha+\beta)=1$, adică $\alpha+\beta=90^0$ α şi β fiind mai mici decât 360^0) şi deci $\beta=60^0$.

Soluţii date de d-nii: *Minea V. Aldea, Dinu D. Buzneu, Hr. Şt. Dăscălescu, I. Gr. Enăchescu, C. I. Jidanu, Em. S. Modâlcă, Marin F. Ştefănescu, Şt. C. Tilică şi Eug. Wegener.*

Gh. Th. Gh.

Problema 1718. — *Un submarin navigând în imersiune are o înălţime* h *de periscop deasupra nivelului apei. La un moment dat catargul unei nave este văzut de vârful periscopului sub unghiul* α. *Dacă înăiţimea catargului este* H, *se cere distanţa orizontală dela submarin la navă. Aplicaţie:* $h=2\,m$, $H=20\,m$, $\alpha=1^0\,50'$.

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

Soluţie. Fie AB periscopul şi CD catargul (A şi C sunt pe aceiaşi orizontală). O paralelă dusă prin B la AC taie pe CD în E. Punem $AC=BE=X$, $\sphericalangle CBE=\beta$, $\sphericalangle EBD=\gamma$ şi prin ipoteză $\beta+\gamma=\alpha$. Din triunghiurile dreptunghice formate scoatem

$$(1) \qquad h=X\operatorname{tg}\beta, \quad H-h=X\operatorname{tg}\gamma$$

de unde

$$\frac{H-h}{h}=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Aplicând proprietăţile proporţiilor, această formulă se mai poate scrie sub forma

$$\frac{H-2h}{H}=\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\alpha}.$$

Această formulă ne dă posibilitatea să calculăm pe $\gamma-\beta$ şi cum $\gamma+\beta=\alpha$, vom cunoaşte pe β şi γ. Apoi cu ajutorul primei formule din (1) avem pe X.

In cazul aplicaţiei numerice, găsim $\gamma-\beta=1^0 28'$, de unde $\beta=11'$, iar $X=625{,}04\,m$.

A rezolvat foarte bine problema D-l *Eug. Wegener* (Bucureşti). Toate celelalte soluţii sunt necomplecte şi conţin greşeli de calcul.

Gh. Th. Gh.

Problema 1833. — *Să se determine cifrele* a, b, c, d *astfel ca numerele de opt cifre* 26*abcd*24 *şi* $abcd5216$ *să fie pătrate perfecte.*

V. THÉBAULT

Soluţie dată de D-l *Eug. Wegener* (Bucureşti).

Extrăgând rădăcina pătrată din numărul 26*abcd*24 obţinem un număr de forma 51 *m n*. Cum ultimele două cifre ale pătratului sunt 24, însemnează că singurele soluţii posibile sunt: 5118, 5132, 5168 sau 5182. Făcând pătratele acestor numere şi înlocuind grupa $abcd$ astfel obţinută în al doilea număr, se găseşte că singura grupă care dă din nou un pătrat perfect este 1939. Soluţia problemei este deci

$$5118^2=26\,1939\,24, \quad 4404^2=1939\,5216.$$

Observări. 1° Soluţia obţinută, 1939, reprezintă anul apariţiei problemei.

2° Alte soluţii dela D-nii *C. Chiriac, I. Gr. Enăchescu, I. Godea, P. F. Ionescu, Gh. Piţulescu, I. Gh. Radoslav, C. C. Tincu* şi *B. A. Vasiliev.*

Gh. Th Gh.

Problema 1854. — *In raport cu două axe rectangulare se consideră punctele:* $A(\lambda,0)$; $B(0,2\lambda)$; $C(3\lambda,0)$. *Se cere:*

1. *Să se scrie ecuaţia cercului* (Γ) *circumscris triunghiului* ABC.

2. *Locul geometric al centrului cercului* (Γ) *când* λ *variază.*

3. *Locul punctelor de contact al tangentelor la cercul* (Γ) *paralele cu dreapta* BC, *când* λ *variază, este format din două drepte ale căror ecuații se cer.*

4. *Între suprafețele* S *și* Σ *ale triunghiului* ABC *și triunghiului format de tangentele la cercul* (Γ) *în* A, B, C, *există o relație de forma*

$$\Sigma = k\,S,$$

k fiind o constantă. Să se determine această constantă.

GH TH. GHEORGHIU

Soluția. 1° Ecuația generală a unui cerc este

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0,$$

care scriind că trece prin cele trei puncte date obținem trei ecuații de condiții în α, β, γ. Rezolvându-le obținem ecuația cercului

$$(\Gamma)\equiv x^2+y^2-4\lambda x-\tfrac{7}{2}\lambda y+3\lambda^2=0.$$

2° Locul geometric se obține eliminând pe λ între ecuațiile a două drepte ce trec prin centrul cercului. Două din aceste drepte sunt

$$x=2\lambda,\quad y=\tfrac{7}{4}\lambda$$

care spun că locul căutat este dreapta $7x=8y$.

3° Locul geometric cerut se va găsi eliminând pe λ între ecuația cercului și perpendiculara coborâtă din centrul cercului pe BC. Ținând seamă de coordonatele centrului cercului date mai sus și de faptul că BC are coeficientul unghiular $-\frac{2}{3}$, locul va fi definit de ecuația lui (Γ) și de dreapta

$$2(3x-2y)=5\lambda.$$

Făcându-se eliminarea să găsește drept ecuație a locului

$$x^2-13xy+11y^2=0,$$

cari reprezintă două drepte ce trec prin origină și ale căror ecuații sunt

$$y=\frac{13\pm5\sqrt{5}}{22}x.$$

4° Suprafața triunghiului ABC este egală cu

$$S=\tfrac{1}{2}AC\,.\,OB=2\lambda^2.$$

In general ecuația tangentei în punctul (x_0, y_0) la cercul (Γ) este

$$xx_0+yy_0-2\lambda(x+x_0)-\tfrac{7}{4}\lambda(y+y_0)+3\lambda^2=0.$$

Aplicând această ecuație punctelor A, B_1 C se găsește că ecuațiile laturilor triunghiului a cărui ecuație este Σ, sunt

$$\begin{aligned}4x+7y-\ 4\lambda&=0,\\ 8x-\ y+\ 2\lambda&=0,\\ 4x-7y-12\lambda&=0.\end{aligned}$$

In general, suprafața triunghiului definit prin dreptele

$$A_ix+B_iy+C_i=0\qquad(i=1,2,3)$$

este dată de expresia

$$\pm\frac{1}{2A}\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_3&B_3&C_3\end{vmatrix}^2,$$

unde: $A=(A_2B_3-A_3B_2)(A_3B_1-A_1B_3)(A_1B_2-A_2B_1)$. Aplicând în cazul nostru se găsește $\Sigma=\frac{65}{21}\lambda^2$, încât trebue să luăm $k=\frac{65}{42}$.

După cum se vede partea importantă a problemei este calculul. Din toate soluțiile primite singura corectă în această privință este a D-lui *Eug. Wegener* (București).

Gh. Th. Gh.

Problema 1979. — *Să se discute sistemul*

$$\begin{cases}ax+ay+2z=6\\ ax+2y+az=2b\\ 2x+ay+az=6.\end{cases}$$

CORNELIA NANES

Soluția. Determinantul sistemului este

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&a&2\\a&2&a\\2&a&a\end{vmatrix}=-2(a+1)(a-2)^2.$$

Dacă $\Delta\neq0$, aplicând regula lui *Cramer* se găsesc soluțiile

$$x=z=\frac{ab-6}{(a+1)(a-2)},\quad y=\frac{6a-2b-ab}{(a+1)(a-2)}.$$

Dacă $\Delta=0$, avem după valoarea lui a, două cazuri. I. $a=-1$. Alegem ca determinant principal determinantul de ord. 2 obținut din Δ suprimând ultima linie și ultima coloană, a cărui valoare este -3. Determinantul caracteristic al sistemului, este

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 2b \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6(6-b).$$

1° Dacă $b \neq 6$ sistemul este *incompatibil*. 2° Dacă $b = 6$ atunci sistemul este *nedeterminant* reducându-se la primele două ecuaţii. II. $a = 2$. Sistemul se reduce la primele două ecuaţii depe cari se citeşte discuţia: 1° $b \neq 3$ sistemul este *incompatibil*, 2° $b = 3$ sistemul este *nedeterminat* reducându-se la o singură ecuaţie.

Soluţie dată de D-nii: *Antony I.* (Beiuş), *Bakonyi C.* (Timişoara), *Gâţă Gh. Gh.* (Tg Jiu). *Ghimuş A. D.* (Bucureşti), *Giurconiu M.* (Timişoara), *Grozescu L.* (Beiuş), *Kinsky I.* (Timişoara), *Luca I. I.* (Timişoara), *Mahrenholz I.* (Germania), *Manolache C. Mircea* (Iaşi), *Morariu Iul.* (Timişoara), *Oprea D. Gh.* (Timişoara), *Pali Sergiu* (Timişoara), *Popescu I. Adr.* (Timişoara), *Popescu I. Barbu* (Craiova), *Tincu C. C.* (Timişoara), *Stanciu A. P.* (Timişoara) şi *Wegener Eug.* (Bucureşti).

S'a primit şi o soluţie neiscălită, iar două cu iscălituri nedescifrabile.

Gh. Th Gh

Probelme 2086. — *Fie* M *un punct pe ipotenuza* BC *a triunghiului dreptunghic* BAC *şi* N *proecţia lui pe* AC. *Să se arate că raportul între* MN *şi suprafaţa triunghiului* BNC *este independent de poziţia lui* M *pe* BC.

G-L. Gh. Buicliu

Soluţie. Notăm cu P proecţia lui N pe BC. Din triunghiurile asemeni ABC şi MNP se scoate

$$(1) \qquad MN = \frac{BC}{AC} \cdot NP.$$

Suprafaţa triunghiului BNC este $\frac{BC \cdot NP}{2}$, cu care împărţind pe (1) obţinem

$$\frac{MN}{\frac{BC \cdot NP}{2}} = \frac{2}{AC} = \text{const.}$$

ceiace demonstrează proprietatea.

Au dat bune soluţii analoage D-nii: *Anton Ioan* (Lic. Samuil Vulcan, Beiuş), *Bitany Al.* (P. T.), *Bogza Mihai* (Lic. Deva), *Bordaşiu I. Nicolae* (Beiuş), *Chiriac Const.*, *Colesnic I. D-tru* (P. T), *Constantinescu N. Ilie* (Liceul Brăila), *Creţa F. Gavril* (P. T.), *David V-le* (Timişoara), *Enăchescu Ion* (Lic. Mil. Timişoara), *Gheorghiu C. Octav* (Lic Internat, Iaşi), *Georgescu C. Nicolin* (P. T). *Goaleg Ioan* (Beiuş), *Grozeanu Liviu* (Beiuş), *Ionescu F. P.* (Particular, Craiova), *Iosifescu Cicerone, Işfanu Teofil* (Lic. Român, Vârşeţ), *Jung Ladislau, Knopf Herman* (Timişoara), *Luca I. Ion* (P. T.), *Mahrenholz J. Mesch Iosef* (Timişoara), *Muţiu Anton* (Beiuş), *Olteanu Gr. Ioan* (P. T.), *Păläceanu D. V* (Lic. Milit. Timişoara), *Pop Emil* (P.T.), *Popescu I. Adrian* (P. T.), *Popescu I. Barbu* (Lic. Milit. Timişoara). *Sasu Ioan* (Lic. Beiuş), *Şipoş I Eugen* (Student), *Soare V. Mircea* (Lic. Sf. Sava Bucureşti), *Stanciu A. Petre* (Timişoara), *Ţigănoiu Al.* (Brăila), *Tincu C. C.* (Lic. D. Loga, Timişoara), *Wegener Eugen* (Bacălaureat, Bucureşti), *Wigh Ioau* (Lic. Titu Maiorescu Bucureşti).

Bune soluţii prin geometria analitică au trimis D-nii *Kinsky Ioan* (P. T.) şi *Wegener Eug.* (Bucureşti)

Problema 2249. — *Să se găsească numărul de trei cifre* abc *al cărui patrat se scrie numai cu cifrele* a *şi* c.

G-L Gh. Buicliu

Soluţie. In condiţiile enunţului grupul ultimelor 2 cifre ale patratului căutat poate fi

$$cc,\ ac,\ aa \text{ sau } ca.$$

1° $(abc)^2$ *se termină în* cc. In acest caz c^2 terminându-se cu c, nu putem avea decât $c=0$, deci

$$(ab0)^2 = \cdots 00 = mnpq00, \text{ sau } npq00,$$

după cum $(ab0)^2$ are 6 sau 5 cifre. Cifra q poate fi 0 şi atunci $b = 0$ cu

$$(a00)^2 = a0000 \quad \therefore \quad a = 1$$

şi deci soluţia

$$(1) \qquad 100^2 = 10000.$$

Cifra $q \neq 0$, dar atunci $q = a$ (căci, patrat terminat în ccc nu există) şi

$$(ab)^2 = \cdots a.$$

Cifrele dinaintea lui a putând fi 0 sau a. Deci

$$(ab)^2 = 00a,\ a0a,\ 000a,\ 00aa,\ 0a0a,\ a00a,\ 0aaa,\ a0aa, \text{ sau } aa0a.$$

Dar nici unul din numerele membrului al doilea nu este patrat perfect, deci terminaţii cc dă numai soluţia (1).

2°. $(abc)^2$ *se termină în* ac. Cifra c fiind unimile lui c^2, nu putem avea de cât

$$c = 0,\ 1,\ 5, \text{ sau } 6.$$

$c = 0$ atrage $a = 0$ şi cum $(abc)^2$ se scrie numai cu cifrele a şi c, rezultă $b = 0$, care dă o soluţie banală cu toate cifrele nule.

Pentru $c = 1$ avem

$$(ab1)^2 = \cdots a1,$$

Zecile patratelor terminate în 1, sunt 0, 2, 4, 6, sau 8.

Acestea vor fi şi valorile lui a.

Pentru $a=0$ avem

$$(ab1)^2=\cdots 01 \leqq 91^2=8281,$$

deci

$$(b1)^2=001,\ 101,\ 0001,\ 0101,\ 1001,\ 1101$$

şi avem soluţiile banale

$$(001)^2=001, \text{ sau } 0001.$$

Pentru $a=2$ avem

$$(2b1)^2=\cdots 21,$$

care nu dă soluţii căci prima cifră de la stânga a membrului al doilea este cel puţin 4.

La fel se examinează cazurile,

$$(4b1)^2=\cdots 41,\ (6b1)^2=\cdots 61 \text{ şi } (8b1)^2=\cdots 81$$

şi nu se găseşte nici o soluţie.

Pentru $c=5$ avem

$$(ab5)^2=\cdots 25,$$

deci $a=2$ şi găsim $b=3$, care dă soluţia

$$(235)^2=55225.$$

Pentru $c=6$ găsim ca mai sus că,

$$(ab6)^2=\ldots a6,$$

nu are soluţie.

3° $(abc)^2$ *se termină cu* aa. In acest caz $a=0$, sau 4. Prima valoare duce la soluţia banală de la 1°, iar a doua dă

$$4(bc)^2=\cdots 44,$$

care necesită $c=2$ sau $c=8$.

Să luăm valoarea $c=2$ şi să facem operaţiile aritmetice de ridicare la pătrat. Avem

$$\begin{array}{r} 4b2 \\ 4b2 \\ \hline ..2b4 \\ ..2b \end{array}$$

Ca $4b$ să se termine cu 4 trebue ca b să fie 1, sau 6. Dar nici 412, nici 462 nu răspund enunţului. Nici pentru $c=8$ nu găsim soluţie.

4°. $(abc)^2$ *se termină cu* ca. Dăm pe rând lui a valorile 0, 1, 4, 5, 6, 9 cu care se termină un patrat perfect. Valoarea 0 atrage $c=0$, caz examinat.

Pentru $a=1$ avem $c=1$, sau 9. Dar 11 şi 91 nu sunt terminaţii de patrat.

Pentru $a=4$ avem $c=2$ sau $c=8$, şi trebue să avem

$$(4b2)^2=\cdots 24 \text{ şi } (4b8)^2=\cdots 84.$$

Făcând operaţiile de ridicare la patrat nu găsim soluţie.

La fel, nu găsim soluţii nici pentru $a=5$, 6 sau 9. Singurele soluţii ale problemei sunt deci

$$100^2=10000 \text{ şi } 235^2=55225.$$

D-l *Tincu C-tin* a rezolvat problema pe această cale dând rezultatul exact, dar fără a examina toate cazurile.

A rezolvat problema prin diferite alte încercări D-l *Vrânceanu Gh. Gh.* şi un anonim.

D-l *Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila) s'a folosit de rezultatele din articolul *Patrate isofinale*, publicat de D-l *I. Mătieş* în „Gazeta Matemetică" Vol. XLIX pag. 397.

G-l Gh. B.

Problema 2293. — *Din punctul* P *se duc tangentele* PA, PB *la un cerc variabil cu centrul într'un punct fix* C.

Se cere locul intersecţiei lui CA *cu* PB *şi al lui* CB *cu* PA.

G-L GH BUICLIU

Soluţie. Considerăm sistemul de axe format din PC ca axă de x şi perpendiculara în P pe PC ca axă de y. Fie λ raza cercului variabil şi $C(a, 0)$. Ecuaţia cercului C va fi

$$f(x_1 y)=(x^2+y^2-2ax+a^2-\lambda^2=0.$$

Ecuaţiile tangentelor din $P(0, 0)$ la cerc se determină utilizând formula

$$(xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1})^2-4f(xy)f(x_1y_1)=0.$$

Aplicând această formulă la cazul particular al problemei găsim că tangentele PA, PC sunt respectiv

$$(PA)\quad y=\frac{\lambda}{\sqrt{a^2-\lambda^2}}x \quad \text{şi} \quad (PB)\quad y=-\frac{\lambda}{\sqrt{a^2-y^2}}x.$$

Perpendicularele CA, CB pe aceste drepte au ecuaţiile

$$(CA)\quad y=-\frac{\sqrt{a^2-\lambda^2}}{\lambda}(x-a)$$

şi

$$(CB)\qquad y=\frac{\sqrt{a^2-\lambda^2}}{\lambda}(x-a).$$

Fie M intersecţia lui CB cu PA şi N intersecţia lui CA cu PB.

Locul lui M se obţine eliminând pe λ între (PA) şi (CB). Se găseşte prin înmulţire, hiperbola:

$$y^2 = x^2 - ax.$$

Inmulţind (PB) cu (CA) se găseşte aceiaşi iperbolă ca loc al lui N', ceia ce era de prevăzut din cauza simetriei. Iperbola trece prin P, C are centrul la mijlocul lui PC şi este tangenta în P la Py.

De oare ce pentru $x > 0$ tangentele PA, PB sunt imaginare, numai ramura corespunzătoare lui $x > 0$ face parte din loc.

Asimptotele iperbolei sunt paralele cu bisectoarele axelor şi nu ecuaţiile

$$2x \pm 2y - a = 0.$$

Bune soluţii analoage s'au primit dela D-nii: *Birănaş T. Ioan* (Lic. „Avram Iancu" Brad), *Brasch M. Andrei* (P., T.), *Chiriac Const.*, *Constantinescu N. Ilie* (Lic. „Bălcescu" Brăila), *London Emeric*, *Kinsky Ioan* (P. T.,) *Popa D. Vasile* (Lic. „S. Vulcan" Beiuş), *Stanciu A. P.* (P. T.), şi *Tincu C. Const.* (Col. „Loga" Timişoara).

Corespondenţi cari au găsit că locul este elipsă sau paralelă nu sunt citaţi aici.

PROBLEME PROPUSE

2555. — Să se găsească bipatratul de patru cifre de forma $abac$, ştiind că diferenţa $ab - ac$ este patrat perfect.

IOAN NOVAC

2556. — Să se arate că a_1, a_2, a_3, a_4 fiind numere diferite, avem

$$\frac{(1-a_1a_2)(1-a_2a_3)(1-a_3a_4)}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_4)} + \frac{(1-a_2a_3)(1-a_3a_4)(1-a_4a_1)}{(a_2-a_3)(a_3-a_4)(a_4-a_1)} + \frac{(1-a_3a_4)(1-a_4a_1)(1-a_1a_2)}{(a_3-a_4)(a_4-a_1)(a_1-a_2)} + \frac{(1-a_4a_1)(1-a_1a_2)(1-a_2a_3)}{(a_4-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a_3)} =$$
$$= \frac{a_1a_2-1}{a_1-a_2} + \frac{a_2a_3-1}{a_2-a_3} + \frac{a_3a_4-1}{a_3-a_4} + \frac{a_4a_1-1}{a_4-1}.$$

Relaţia se menţine dacă se inversează fiecare fracţie.

C. IONESCU-TIU

2557. — Să se discute sistemul de ecuaţii,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & \alpha_1 & 1 \\ b_1 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & \alpha & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & \alpha_1 & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b_1 & \beta_1 & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix},$$

unde $a, a_1, b, b_1, \alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, c, \gamma$ sunt constante.

GH. TH. GHEORGHIU

2558. — Să se arate că rădăcinile ecuaţiei

$$x^3 + 2x \pm 2\sqrt{5 \pm \sqrt{21}} = 0,$$

verifică relaţia

$$x_1^{17} + x_2^{17} + x_3^{17} = 0.$$

D-TRU STANCU

Fie D punctul care împarte latura BC a triunghiului ABC în medie şi extremă a raţiei aşa că $BD > DC$. Paralela dusă la AB din mijlocul M al lui BD taie pe AC în E. Să se demonstreze că suprafaţa triunghiului CDE este egală cu jumătate din suprafaţa triunghiului ABC.

G-L GH EUICLIU

2559 — Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând latura a şi unghiurile asociate β, γ. Discuţie.

V. ALACI

2560. — Să se verifice relaţia

$$\sum \frac{r_a^3 (r_b + r_c)}{(r_a - r_b)(r_a - r_c)} = p^2,$$

notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu oarecare.

LT. COL EUGEN ŞT. IACOB

2561. — Dacă φ, δ au acelaş semn în momentul răsăritului, sau apusului astrului, atunci avem relaţia,

$$\cos^2 \frac{P}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{cp\,\varphi} + \frac{1}{cp\,\delta} - \frac{1}{cp\,\varphi\, cp\,\delta}\right].$$

LT C-DOR C. V. COSTACHESCU

ERATĂ. In enunţul problemei 2424 din n-rul trecut, p. 77, al 2-lea membru al primei relaţii este $3\,\mathrm{tg}\,3a$ şi nu $\mathrm{tg}\,3a$; totastfel ultimul membru dela sfârşit este $\mathrm{tg}3a$, nu $3\,\mathrm{tg}\,a$.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Barbu Vasile (2497, 2508, 2509, 2516, 2523, 2530, 2531, 2535); *Blaga Ovidiu* (2416, 2428, 2476, 2477, 2490, 2508, 2509, 2531); *Căstin Ioan* (2416, 2427, 2449, 2452, 2468, 2488, 2501, 2508); *Ciucescu Paul* (1747, 2230, 2233, 2234, 2279, 2416, 2417, 2446, 2453, 2455, 2462, 2463, 2473, 2490, 2496, 2499, 2505, 2508, 2512, 2513, 2919, 2521, 2522, 2523, 2531, 2535, 2537, 2546, 2550, 2554); *Giurconiu Mihai* (P; 1513, 1519, 2514, 2515, 2521, 2522, 2523, 2524, 2531, 2535); *Man Iosif* (P; 2234, 2249, 2297, 2499); *Marinescu D.* (2279, 2475, 2512, 2522, 2523, 2535); *Neguţ Ion* (N; P; 1377, 1728, 1784, 1995, 2004, 2211, 2225, 2297, 2327, 2353); *Novac Ioan* (N; 2537, 2538); *Poli Sergiu* (N.); *Popescu Alexandru* (1519, 2490, 2497, 2515, 2521, 2522, 2524); *Stanciu D-tru* (P; 2325, 2330, 2331, 2345, 2362, 2403, 2413, 2518, 2435, 2442, 2449, 2452, 2456, 2475, 2480, 2498, 2506, 2546, 2550, 2553); *Tămăsescu Virgil* (1637, 2052, 2098, 2233, 2234, 2496); *Turbuţiu Gh.* (2416, 2450, 2476, 2477, 2509).

INFORMAŢII

A APĂRUT:

I. **Curs de Geometrie**, vol. I, (geometrie plană elementară) de **Gh. Th. Gheorghiu.** Volumul conţine capitolele: linia dreaptă, cercul, figuri asemenea, aplicaţii, raportul anarmonic şi conice. Preţul este de 300 lei +30 lei expediţia Se trimet banii pe adresa autorului sau se depun la CEC cont no. 86.405.

II. **Aritmetica** de cl. I, II, III.
Geometria de cl. III, V.
Algebra de cl. IV, VII.
de **Em. Arghiriade, R. Faion** şi **Sp. Ghiţescu** cu o prefaţă de **Miron Nicolescu**.

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, şi nu în continuare.

3. *N. Schlomnik* S'a luat notă pentru no. 1, 2, 3. Fascicola III din „67 examene" nu a apărut. La apariţie se va anunţa în revistă.

4. *Petrescu Gh.* No. 5 vi s'a trimes la vreme. Vă vom avea în vedere la sfârşitul anului.

5. *Turbuţiu Gh.* Pentru no. 3 vă vom avea în vedere la sfârşitul anului.

6. Ing. *D. S. Marinescu.* Mulţumim pentru indicaţiile date asupra problemelor 1454, şi 2418.

7. Cine este amator să vândă vol. I, XXIII şi XXV din R. M. T. este rugat să se adreseze d-lui *D. S. Marinescu* str. Agraru, Ploieşti, indicând şi condiţiile.

8. *Stănilă Bébé.* a) Anunţurile de primire a manuscriselor depe ultima pagină a copertei nu indică faptul că aceste manuscrise sunt bune. Soluţia pr. 2383 trimeasă de D-ta probabil că a conţinut o greşeelă ceiace a făcut să nu fii menţionat în corpul revistei. Să poate să se fi şi rătăcit undeva, în care caz, când o vom găsi, vă vom menţiona într'o erată. b) *Trigonometria patratică* a D-lui Prof. *Alaci* este deocamdată epuizată. Dacă vom avea vre-un volum în viitor te vom anunţa.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

ANUL XXVII. NOEMVRIE 1947 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 250 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 500 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 500 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN VISA**: ASUPRA UNOR CUBICE UNICURSALE.
2. NOTE MATEMATICE 19-20.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 407, 782, 458, 548, 1618, 1714, 1811, 1907, 2320, 2345, 2379.
6. PROBLEME PROPUSE: 2563-2570.
7. ERATA.
8. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Mulţumim D-lui Prof. I. Nemeth pentru donaţia de 275 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Începând cu data de 15 Septembrie, costul abonamentului pe anul în curs este de 250 lei pentru particulari, şi de 500 lei pentru instituţii. În această sumă intră şi expediţia revistei.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV şi XXVI sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 3 lei la care se adaogă 2 lei expediţia.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Harry Truman, Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — No. 9. TIMISOARA, NOEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 250 lei pentru particulari și 500 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.

ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Harry Truman No. 1.

ASUPRA UNOR CUBICE UNICURSALE

DE

EUGEN VIȘA

Dându-se o conică (C) pe care vom numi-o *conică directoare*, un punct fix O pe această conică și o dreaptă fixă (Δ), care să nu treacă prin O, se știe că[1], dacă prin punctul O se duce o dreaptă variabilă, care intersectează a doua oară conica în M și dreapta (Δ) în N, locul geometric al punctului P al dreptei variabile definit prin relația

$$\overline{OP} = \overline{MN}, \tag{1}$$

este o cubică unicursală, având punctul O ca punct dublu.

Această teoremă, care generalizează precum vedem, teorema de asemenea cunoscută privitoare la generarea *cubicelor circulare unicursale*[2] ca și teorema analoagă relativă la generarea așa numitelor *cubice iperbolice unicursale*, de care ne-am ocupat cu altă ocazie[3], merită, credem, ceva mai multă atențiune decât aceea care i-se poate acorda, chiar cu bunăvoință, într'un curs obișnuit de *Geometrie Analitică*.

Ne propunem deci a împlini, pe cât vom putea în articolul de față, golul respectiv, în sensul că, după ce vom face demonstrarea teoremei de mai sus, care, de altfel este dintre cele mai ușoare și, după ce vom stabili câteva proprietăți mai importante ale cubicelor unicursale de felul celei al cărei obiect îl constitue această teoremă, vom da apoi niște criterii, în baza cărora să putem recunoaște, dacă o cubică unicursală dată cu punctul dublu situat la distanță finită admite, sau nu, vre-o conică directoare, învederând în acelaș timp și modul în care această conică poate fi determinată, în caz de existență.

*

1. In ordinea de idei preconizată, să considerăm deci în primul rând o conică directoare (C), un punct fix O al acestei conice și o dreaptă fixă (Δ), netrecând prin punctul O.

Raportând toată figura la un sistem de axe de coordonate rectangulare și alegând origina acestor axe în punctul O, ecuația conicei directoare va fi atunci de forma:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0. \tag{2}$$

În ceeace privește acum dreapta (Δ), am putea natural să dispunem încă de alegerea axelor, cărora nu le-am fixat decât origina, așa încât această dreaptă să aibă o poziție particulară după voie.

Pentru motive ce vor fi mai pe urmă ușor de înțeles, preferăm totuși, să lăsăm direcția axelor arbitrară, astfel încât ecuația dreptei (Δ) să fie a unei drepte oarecare, adică de forma:

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

coeficienții A, B, C nefiind supuși a priori nici unei restricțiuni, afară evident de aceea ca termenul C să fie diferit de zero, căci altfel dreapta (Δ) ar trece chiar prin origină, adică prin punctul O, ceeace noi tocmai am exclus[4].

Intersectând acum conica (2) și dreapta (3), cu dreapta variabilă,

$$y = mx \tag{4}$$

dusă prin origină, găsim că punctele corespunzătoare M și N au respectiv abscisele:

---

[1]) A se vedea de ex.: *Prof. Gh. Vrânceanu*: *Curs de Geometrie analitică și proectivă*, Vol. I, București 1944, pag. 314, exercițiul 1.

[2]) A se vedea la fel, de ex.: *Prof. N. Abramescu*: *Lecțiuni de Geometrie Analitică*, Cluj 1927, pag. 267.

[3]) R. M. T. Vol. XXVII. Nr. 5 din 15 Iulie 1947, pag 55.

[4]) Ca un caz limită se poate lua în considerare și cazul C=0, dar numai după stabilirea ecuației cubicei respective, când de altfel se va putea apoi vedea că, pentru acest caz, numita cubică nu mai este propriu zisă, ci degenerată.

$$5)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2(a_{13}+a_{23}m)}{a_{11}+2a_{12}m+a_{22}m^2} \\ x_2 = -\dfrac{C}{A+Bm}. \end{cases}$$

Urmează atunci că, notând încă prin x abscisa punctului P şi proectând relaţia geometrică (1) pe axa x-ilor, vom avea:

$$(6)\qquad x = x_2 - x_1$$

ceeace, în virtutea relaţiilor (5), ne dă:

$$x = -\frac{C}{A+Bm} + \frac{2(a_{13}+a_{23}m)}{a_{11}+2a_{12}m+a_{22}m^2}$$

şi astfel, aceasta din urmă relaţie, împreună cu relaţia (4), constitue o reprezentare parametrică a curbei — loc geometric descrisă de punctul P.

Cât despre ecuaţia cartezianã a locului, aceasta se obţine evident, eliminând parametrul m între relaţiile (7) şi (4) de mai sus şi se găseşte că este anume:

$$(8)\quad (Ax+By+C)(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2) - 2(Ax+By)(a_{13}x+a_{23}y)=0,$$

care se vede clar că este aceea a unei cubice unicursale având origina ca punct dublu, întrucât primul membru al ei se poate descompune într'o sumă de două grupuri omogene de termeni, unul de gradul al treilea şi altul de gradul al doilea, cari în speţă sunt respectiv:

$$(9)\quad \begin{cases} P(x,y) = (Ax+By)(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2) \\ Q(x,y) = C(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2) \\ \qquad -2(Ax+By)(a_{13}x+a_{23}y). \end{cases}$$

2. Clasificare, nomenclatură. Dat fiind că în cazul particular pentru care conica directoare (2) este un cerc, cubica (8) se numeşte precum se ştie, *cubică circulară unicursală* şi întrucât, în cazul particular analog pentru care conica respectivă este o iperbolă echilateră, am numit[5] cubica (8), *cubică iperbolică unicursală*[6], considerăm potrivit a introduce relativ la această cubică următoarea clasificare şi nomenclatură corespunzătoare.

a) În cazul când conica directoare (2) este de gen elipsă, cubica (8) se va numi în general *cubică eliptică unicursală.*

b) În cazul când conica directoare (2) este de gen parabolă, cubica (8) se va numi *cubică parabolică unicursală.*

c) În cazul când conica directoare (2) este de gen iperbolă, cubica (8) se va numi în general *cubică iperbolică unicursală.*

3. Teoremă *Pentru ca o cubică unicursală de tipul* (8) *să fie propriu zisă (nedegenerată) este necesar şi suficient să avem îndeplinite simultan următoarele condiţiuni:*

a) *Conica directoare de ecuaţie* (2) *să fie ea însăşi propriu zisă.*

b) *Dreapta* (Δ) *de ecuaţie* (3) *să nu treacă prin origină, să nu fie aruncată la infinit şi nici să nu fie paralelă cu vreuna din direcţiile asimptotice ale conicei directoare.*

Prima condiţie este necesară. În adevăr, conica (2) poate degenera în trei cazuri şi anume, fie că grupul termenilor de gradul întâi este identic nul, fie că cel al termenilor de gradul al doilea este identic nul, fie în sfârşit că acest de al doilea grup este divizibil cu cel dintâi.

În primul caz conica (2) degenerează în dreptele duse prin origină de ecuaţie comună:

$$(10)\qquad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0,$$

astfel încât ecuaţia (8) se reduce la:

$$(11)\quad (Ax+By+C)(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)=0$$

care se vede că reprezintă o cubică degenerată compusă din conica degenerată (10) de mai sus şi dreapta (Δ) de ecuaţie (3).

În al doilea caz, conica (2) degenerează în dreapta de ecuaţie:

$$(12)\qquad a_{13}x+a_{23}y=0$$

şi dreapta dela infinit a planului, ecuaţia (8) reducându-se la:

$$(13)\qquad (Ax+By)(a_{13}x+a_{23}y)=0,$$

care împreună cu dreapta dela infinit a planului reprezintă o cubică degenerată în această dreaptă improprie, dreapta (12) şi dreapta de ecuaţie:

$$(14)\qquad Ax+By=0.$$

În cazul al treilea în sfârşit, când adică,

---

[5]) R. M. T. Loc. cit.

[6]) Mai precis şi mai corect ar fi să se numească în acest caz *cubică iperbolică echilateră unicursală.*

(15) $$a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{22}a_{13}^2 = 0$$

şi când are prin urmare loc o identitate de forma:

(16) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \equiv (a_{13}x + a_{23}y)(\alpha x + \beta y),$$

conica (2) degenerează în dreptele de ecuaţie comună:

(17) $$(a_{13}x + a_{23}y)(\alpha x + \beta y + 2) = 0$$

iar ecuaţia (8) se reduce la:

(18) $$(a_{13}x + a_{23}y)[(Ax + By + C)(a_{13}x + a_{23}y) - 2(Ax + By)] = 0,$$

care se vede de asemenea că reprezintă o cubică degenerată.

Urmează deci că prima din condiţiunile enunţate este cu adevărat necesară pentru nedegenerarea cubicei (8).

Să arătăm că şi a doua condiţie este necesară.

In adevăr, dacă, în primul rând, dreapta (Δ) trece prin origină, avem $C = 0$ şi deci ecuaţia (8) se reduce la:

(19) $$(Ax + By)(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_{13}x - 2a_{23}y) = 0,$$

care reprezintă o cubică degenerată.

La fel, dacă dreapta (Δ) este aruncată la infinit, însemnează că $A = B = 0$ şi deci ecuaţia (8) se reduce la:

(20) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

care, împreună cu dreapta dela infinit, reprezintă de asemenea o cubică degenerată.

În sfârşit, dacă dreapta (Δ) este paralelă cu una oarecare din direcţiile asimptotice ale conicei (2), însemnează că:

(21) $$a_{11}B^2 - 2a_{12}AB + a_{22}A^2 = 0$$

şi deci că are loc o identitate de forma:

(22) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (Ax + By)(\alpha x + \beta y),$$

în virtutea căreia este clar că ecuaţia (8) se reduce la:

(23) $$(Ax + By)[(Ax + By + C)(\alpha x + \beta y) - 2(a_{13}x + a_{23}y)] = 0,$$

care reprezintă la fel o cubică degenerată.

Urmează din analiza de mai sus că a doua condiţie enunţată este şi ea necesară pentru nedegenerarea cubicei (8).

Să arătăm acuma că, cele două condiţiuni în cauză sunt şi suficiente pentru scopul urmărit, deci că aceste condiţiuni fiind presupuse îndeplinite în ansamblul lor, conica (8) este sigur propriu zisă.

În adevăr, să scriem pentru aceasta ecuaţia (8) sub formă omogenă, adică:

(24) $$(Ax + By + Cz)(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) - 2(Ax + By)(a_{13}x + a_{23}y)z = 0$$

şi să presupunem, cu toată îndeplinirea condiţiunilor enunţate, că această cubică ar fi degenerată.

Or, lucrul acesta e posibil exclusiv în următoarele cazuri:

Dacă unul oarecare din produsele,

(25) $$\begin{cases} \pi_1 = (Ax + By + Cz)(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) \\ \pi_2 = (Ay + By)(a_{13}x + a_{23}y)z, \end{cases}$$

este identic nul, sau dacă aceste două produse admit un divizor comun de gradul întâi, care în speţă nu ar putea fi decât unul din factorii celui de al doilea produs.

Să cercetăm deci aceste posibilităţi.

a) Pentru ca primul produs din (25) să fie identic nul, trebue ca unul cel puţin din factorii lui să fie identic nul. Or, factorul $Ax + By + Cz$ nu poate fi identic nul, căci nu ar mai exista dreapta (Δ). In ceeace priveşte factorul al doilea $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, dacă acesta ar fi identic nul, atunci, cum s'a văzut ceva mai sus, conica (2) ar fi ea însăşi degenerată şi deci condiţiile necesare de nedegenerare a cubicei (8) nu ar mai fi îndeplinite în ansamblul lor, ceeace e contra ipotezei.

Deci primul produs din (25) nu poate fi identic nul.

Pentru ca al doilea produs din (25) să fie identic nul, trebue de asemenea ca unul cel puţin din factorii lui să fie identic nul. Cum însă factorul z nu e identic nul, va trebui să aibă loc cel puţin una din următoarele identităţi:

$$\begin{cases} Ax + By \equiv 0 \\ a_{13}x + a_{23}y \equiv 0. \end{cases}$$

Or, în ipoteza primă, însemnează că $A = B = 0$ şi deci că dreapta (Δ) este aruncată la infinit, iar în ipoteza a 2-a, însemnează că $a_{13} = a_{23} = 0$ şi deci că însăşi conica (2) este degenerată.

Fiecare din aceste concluzii fiind însă în contradicţie cu ipoteza fundamentală a îndeplinirii condiţiilor necesare de nedegenerare a cubicei (8), rezultă că nici al doilea produs din (25) nu poate fi identic nul.

b) Să presupunem acum în al doilea rând că

primul produs din (25) ar fi divizibil de exemplu cu factorul $Ax+By$ al celui de al doilea produs.

Lucrul nu e posibil însă decât, sau dacă,

$$C=0,$$

deci dacă dreapta (Δ) ar trece prin origină, sau dacă

$$a_{11}B^2-2a_{12}AB+a_{22}A^2=0,$$

deci dacă dreapta (Δ) ar fi paralelă cu una din direcţiile asimptotice ale conicei directoare. Ajungând la o contradicţie, conchidem că primul produs din (25) nu poate fi divizibil cu factorul $Ax+By$ al celui de al doilea produs.

Cu factorul $a_{13}x+a_{23}y$ al celui de al doilea produs, primul produs din (25) ar putea fi divizibil sau dacă, în prealabil

$$C=0$$

şi apoi în acelaş timp dacă

$$\frac{A}{a_{13}}=\frac{B}{a_{23}},$$

deci iarăşi dacă în primul rând dreapta (Δ) ar trece prin origină, sau pe urmă dacă:

$$a_{11}a_{23}^2-2a_{12}a_{13}a_{23}+a_{22}a_{23}^2=0,$$

deci dacă ar degenera conica (2).

Ajungând şi de astă dată la contradicţii, urmează că primul produs din (25) nu poate fi divizibil nici cu factorul $a_{13}x+a_{23}y$ al celui de al doilea produs.

In sfârşit, cercetând divizibilitatea prin factorul z, conchidem că nu poate avea loc decât exclusiv dacă $A=B=0$, deci dacă dreapta (Δ) ar fi aruncată la infinit, ceeace din nou constitue o contradicţie.

Urmează deci că, în ipoteza îndeplinirii condiţiilor enunţate, cubica (8) este în adevăr propriu zisă şi deci că aceste condiţiuni, care am văzut că sunt necesare acestui scop, sunt în acelaş timp şi suficiente.

— Va urma —

NOTE MATEMATICE

19. — *Generalizarea problemei 2250.*

Ne propunem în rândurile de mai jos să stabilim formula:

$$\frac{(2n+1)C_{2n}^0}{1.2\ldots 2n}+\frac{(2n+3)C_{2n}^1}{2.3\ldots(2n+1)}+\frac{(2n+5)C_{2n}^2}{3.4\ldots(2n+2)}+\ldots$$
$$+\frac{(6n+1)C_{2n}^{2n}}{(2n+1)\ldots 4n}=\frac{C_{2n+1}^0}{1.2\ldots(2n-1)}+\frac{C_{2n+1}^1}{2.3\ldots 2n}+$$
$$+\frac{C_{2n+1}^2}{3.4\ldots(2n+1)}+\cdots+\frac{C_{2n+1}^{2n+1}}{(2n+2)\ldots 4n}.$$

Intr'adevăr, în virtutea cunoscutei formule din analiza combinatorie:

$$C_m^n=C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1},$$

fiecare termen din membrul al 2-lea se mai poate scrie:

$$\frac{C_{2n+1}^0}{1.2\ldots(2n-1)}=\frac{2nC_{2n}^0}{1.2\ldots 2n},$$
$$\frac{C_{2n+1}^1}{2.3\ldots 2n}=\frac{C_{2n}^0}{2.3\ldots 2n}+\frac{(2n+1)C_{2n}^1}{2.3\ldots(2n+1)},$$
$$\frac{C_{2n+1}^2}{3.4\ldots(2n+1)}=\frac{2C_{2n}^1}{2.3\ldots(2n+1)}+\frac{(2n+2)C_{2n}^2}{3.4\ldots(2n+2)},$$
$$\frac{C_{2n+1}^3}{4.5\ldots(2n+2)}=\frac{3C_{2n}^2}{3.4\ldots(2n+2)}+\frac{(2n+3)C_{2n}^3}{4.5\ldots(2n+2)(2n+3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{C_{2n+1}^{2n}}{(2n+1)\ldots(4n-1)}=\frac{2nC_{2n}^{2n-1}}{2n(2n+1)\ldots(4n-1)}+\frac{4nC_{2n}^{2n}}{(2n+1)\ldots 4n},$$
$$\frac{C_{2n+1}^{2n+1}}{(2n+2)\ldots 4n}=\frac{(2n+1)C_{2n}^{2n}}{(2n+1)\ldots 4n}.$$

Adunând aceste relaţii membru cu membru, obţinem formula ce ne-am propus să demonstrăm.

Observare. Pentru $n=2$, obţinem problema 2250.

ILIE CONSTANTINESCU

20. — *Asupra problemei 2391 „R.M.T.".*

Integrarea ecuaţiei diferenţiale,

$$(y^{IV}+y'')\operatorname{tg}^2x+(y'''+y')\operatorname{tg}^3x=2\operatorname{cosec}x,$$

se poate face cu înlesnire.

Această ecuaţie se poate scrie,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'''+y'}{\cos x}\right)=\frac{2\cos x}{\sin^3x}.$$

Integrând prima dată obţinem:

$$\frac{y'''+y'}{\cos x}=-\frac{1}{\sin^2x}+C_1,$$

* * *

$$y'''+y'=-\frac{\cos x}{\sin^2x}+C_1\cos x.$$

Integrând a doua oară obţinem:

$$y''+y=\frac{1}{\sin x}+C_1\sin x+C_2.$$

Ecuația caracteristică a precedentei, fiind $r^2+1=0$, obținem drept integrală generală a ecuației cu membrul al doilea nul:

$$y = C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Aplicând metoda variațiunii constantelor arbitrare *(Lagrange)* avem

$$\begin{cases} \frac{dC_3}{dx}\cos x + \frac{dC_4}{dx}\sin x = 0 \\ -\frac{dC_3}{dx}\sin x + \frac{dC_4}{dx}\cos x = \frac{1}{\sin x} + C_1 \sin x + C_2 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem vom afla:

$$\frac{dC_3}{dx} = -1 - C_1 \sin^2 x - C_2 \sin x$$

$$\frac{dC_4}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} + C_1 \sin x \cos x + C_2 \cos x.$$

Integrând aceste două ecuațiuni vom găsi:

$$C_3 = -x - \frac{C_1}{1} x + \frac{C_1}{4} \sin 2x + C_2 \cos x + k_3$$

$$C_4 = L \sin x + C_1 \frac{\sin^2 x}{2} + C_2 \sin x + k_4.$$

Introducând aceste valori în expresia precedentă a integralei generale și schimbând, pentru o mai aleasă prezentare, notația constantelor arbitrare, găsim

$$y = C_1 + C_2 \sin x - (C_3 + 1) x \cos x + C_4 \cos x + \sin x L \sin x,$$

care este integrala generală a ecuației dela care am plecat.

Se vede că soluția particulară $e^y = (\sin x)^{\sin x}$, corespunde valorilor constantelor

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = -1.$$

VIRGIL GHITESCU

EXAMEN DE ADMITERE LA POLITEHNICA DIN TIMIȘOARA

Facultatea Electromecanică

(10 — 12 Octombrie 1947).

GEOMETRIE.

Lucrarea scrisă. Să se determine elipsa, raportată la axele sale de simetrie, care trece prin punctele

$$P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right), \quad Q\left(\frac{15}{13}, \frac{24}{13}\right).$$

Fie AA′ axa mare a elipsei astfel determinate: tangenta într'un punct variabil M (α, β) la elipsă tae tangenta în A în C. Să se afle locurile intersecțiilor dreptei CA′ cu raza vectoare OM și cu coarda AM.

Să se afle locurile intersecțiilor dreptelor OM și A′M cu paralela dusă prin C la AA′.

Oral. 1. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând unghiul A, latura $BC = a$ și știind că vârful A se află pe o dreaptă dată, iar vârful C pe un cerc dat. Discuție.

2. Fiind date trei drepte D_1, D_2, D_3, nesituate, două câte două, într'un acelaș plan, să se construiască o dreaptă D, care să le întâlnească pe toate trei. Câte astfel de drepte există?

3. Fiind dat un tetraedru SABC, un plan P tae muchiile SA, SB, SC în punctele D, E, F. Să se arate că intersecțiile (AB, DE), (BC, EF), (CA, FD) sunt colineare.

ALGEBRĂ.

I.

Să se calculeze volumul și suprafața laterală a unei piramide drepte, cu baza un triunghiu echilateral. Latura triunghiului de bază și înălțimea piramidei notate respectiv cu x și y, satisfac sistemul:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 - x - y = 14 \\ y^2 - x^2 + x + y = 28. \end{cases}$$

II.

Să se afle derivata funcției

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

și apoi să se studieze variația funcției, $z = 4\sqrt{x} \cdot y'$, y' fiind derivata lui y.

III.

Să se determine valoarea întreagă k, astfel ca ecuația,

$$x^3 - k x^2 + 23 x - 15 = 0,$$

să aibă rădăcinele în progresie aritmetică; apoi să se afle rădăcinele ecuației.

Oral.

I.

Să se rezolve inegalitatea

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

II.

Să se afle limita expresiei

$$E = x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}$$

pentru $x = \infty$.

III.

Să se rezolve ecuația

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ b & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

Să se stabilească relaţia,

$$1+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n,$$

unde C_p^r înseamnă combinările a p obiecte luate câte r.

(Timp acordat pentru toate chestiunile, 4 ore).

TRIGONOMETRIE.

a) *Teză.*

Din punctul A situat la cota de 1250 m, vârfurile C şi B situate în acelaş plan cu A, se văd direct sub unghiurile $\gamma=45^0$ şi $\beta=20^0$, şi indirect prin reflexia pe suprafaţa lacului în punctele E şi D sub unghiurile $\varepsilon=30^0$ şi $\delta=65^0$. Cota suprafeţei lacului este 1200 m.

Se cere:

1. Cota vârfurilor C şi B.
2. Distanţa dintre vârfurile C şi B.

b) *Oral.*

1. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresiunea,

$$\frac{\sin 2\alpha\sqrt{1+\sin\beta}-\sin 2\alpha\sqrt{1-\sin\beta}}{2\,[2\cos^2\alpha-1]}.$$

2. Să se rezolve ecuaţiunile

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha=0$$
$$\sin x+\operatorname{tg} x=1.$$

3. Să se rezolve un triunghiu oarecare fiind cunoscute

r_a, r_b şi R.

4. Să se rezolve un triunghiu oarecare cunoscându-se bisectoarea l_a dusă din vârful A, înălţimea h_b dusă din vârful B şi unghiul pe care îl fac între ele γ.

FIZICĂ.

Teză

Problema 1-a. O masă de fer de 10 grame se pune deasupra unui cub de lemn ce pluteşte în petrol lampant, făcând ca nivelul petrolului să se ridice la nivelul feţei de sus a cubului. Se ridică greutatea de 10 gr. şi se prinde dedesubtul cubului o altă greutate de fer astfel aleasă, încât petrolul să se ridice din nou la nivelul feţei de sus a cubului. Cât este de mare această greutate? (densitatea ferului se ia 7,8 iar densitatea petrolului 0,8).

Problema 2-a. Se pune un obiect înaintea unei oglinzi concave pe axul optic, la o distanţă de 30 cm de vârful oglinzii. O imagine reală se va forma la o distanţă de 45 cm. de vârf. Se cere: 1. distanţa focală şi raza de curbură a oglinzii. 2. La ce distanţă de vârful oglinzii trebue pus un obiect pentru a avea o imagine virtuală de 4 ori mai mare ca obiectul.

Problema 3-a. Trei maşini Gramme identice G, M, M', având fiecare I Ohm rezistenţă interioară se montează ca în figură. G este generatricea iar M şi M' sunt două motoare. Forţa electromotrice a generatricei ca şi forţele electromotrice ale celor două motoare sunt date în volţi prin acelaş număr ca numărul lor de tururi pe secundă, orişicare ar fi intensitatea curentului. Firele de legătură ff' au fiecare câte 0,5 Ohmi. Se roteşte generatricea G cu 50 tururi pe secundă, iar motoarele M şi M' respectiv cu n şi n' tururi de secundă. Să se calculeze intensitatea curentului dat de maşina G precum şi diferenţa de potenţial dintre A şi B pentru 2 cazuri: 1) Motoarele M şi M' sunt oprite ($n=n'=0$). 2) M este oprit ($n=0$), iar M' merge fără a efectua vre-un lucru mecanic şi fără frecare.

Oral

Problema 1-a. O piatră e lăsată să cadă liber într'un puţ cu apă. T secunde după eliberarea pietrei auzim sgomotul pe care-l face piatra la atingerea cu apa din puţ. Cunoscând viteza sunetului în aer V, se cere adâncimea puţului. Discuţie.

Problema 2-a. Doi magneţi A şi B de aceiaşi lungime $l=10$ cm. sunt aşezaţi unul după altul (polii succedânse alternativ, după aceiaşi direcţie), la o distanţă $r=2$ cm. Masele magnetice sunt respectiv 50 şi 100 unităţi de masă magnetică c. g. s. Ce forţe în grame se exercită între aceşti 2 magneţi?

Problema 3-a. Cu un curent de 10 amperi se aureşte o suprafaţă de 40 cmp., astfel ca grosimea aurului să fie de 0,05 mm. Se cere timpul cât trebue să treacă curentul. (Densitatea aurului = 19,32, numărul lui *Faraday* =96500 culombi, greutatea atomică a aurului e 196, aurul fiind trivalent în combinaţie).

BIBLIOGRAFIE

---

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, No. 2, Octombrie 1947, Este un număr Comemorativ ce cuprinde 104 pagini şi din care se desprinde pe larg, viaţa şi opera luminoasă a marelui Inginer-Profesor **Ion Ionescu,** fondatorul „Gazetei Matematice", acel care a fost sufletul „G. M." timp de 51 de ani, acel care a fost catalizatorul energiilor româneşti în ogorul ştiinţei, acel care avea scânteia sfântă ce a încălzit şi luminat în tot cuprinsul ţărei atâtea generaţii de colaboratori şi a creiat o atmosferă ştiinţifică remarcabilă. Acest număr al „G. M." cuprinde cuvântări şi articole care ilustrează cele afirmate mai sus, şi anume: În memoria lui *Ion Ionescu*, „G. M.". Dare de seamă despre Comemorarea lui *Ion Ionescu*, de Ing. *R. P. Voinea.* Cuvântarea ţinută la inaugurarea *Casei de cetire „Ion Ionescu"*, de Ing. *I. S. Antoniu.* Activitatea lui *Ion Ionescu* la „G. M", de G-l *Gh. Buiciu.* Cuvântul Academiei Române de *N. Vasilescu Karpen.* Inginerul *Ion Ionescu* şi Societăţile de Ştiinţe, de *O. Onicescu.* Cuvântul Agirului, de Ing. *Cristea Niculescu.* Inginerul *Ion Ionescu*, de Prof. Ing. *George Borneanu.* Profesorul *Ion Ionescu*, de Ing. *D. A. Stan.* Activitatea Profesorului *I. Ionescu* ca ofiţer de rezervă, de Lt. Colonel *Mihail Focşăneanu. Ion Ionescu*, omul, de *C-tin C. Teodorescu.* Cuvântul Colegiului Inginerilor, de Ing. *Enea Grapini.* Scrisoarea d-lui *T. Constantinescu.* Scrisoarea d-lui Ing. *I. Vardala.* Memoriu pentru înscrierea în Colegiul Inginerilor, † *Ion Ionescu.* Testamentul inginerului *Ion Ionescu.* Asupra problemei 5527, de *N. Geor-*

gescu Roegen. O clasă de funcțiuni transcendente întregi, de *N. Ciorănescu.* Concursul „G. M." din 1948. Premiul „Inginer *H. Capriel*". Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Mihail Șt. Botez*: Metode de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice. Este o monografie interesantă, ce cuprinde 72 pagini, scoasă în a 2-a ediție. O recomandăm călduros elevilor de liceu, pentru a se putea pregăti mai bine la examenul de bacalaurest și la examenele de admitere în Politehnici și Școli Speciale.

3. *Tiberiu Ionescu, Gh. D. Simionescu* și *C. Ionescu-Bujor*, Aritmetica pentru cl. I-a și a III-a a Gimnaziului unic, cărți apărute în editura „Remus Cioflec".

PROBLEME REZOLVATE

Problema 407. — *Se dau în plan 4 drepte oarecari. Se cere să se construiască un romb care are câte un vârf pe câte una din cele 4 drepte.*

I. PROTOPOPESCU

Problema 782. — *Se dă un patrulater complet. Să se construiască un paralelogram având câte un vârf pe fiecare latură, diagonalele fiind paralele cu două direcții date* δ_1, δ_2.

P. TROFIM

Soluția. Deoarece patru drepte oarecari din plan formează un patrulater complet și cum rombul este un caz particular al paralelogramului (paralelogramul cu diagonalele perpendiculare), problema 407 este un caz particular al problemei 782 când cele două direcții date δ_1, δ_2 sunt perpendiculare. Ne mărginim deci la soluția ultimei probleme.

Presupunem problema rezolvată; fie ABCDEF patrulaterul dat și LMNP paralelogramul înscris, având diagonalele paralele cu direcțiile date δ_1, δ_2. Dacă I este centrul paralelogramului, atunci dreapta AI este locul mijloacelor tuturor segmentelor paralele cu δ_1 și mărginite la AB și AD. Analog, CI este locul mijloacelor tuturor segmentelor paralele cu δ_2 și mărginite la CD, CF. De aci rezultă imediat construcția paralelogramului LMNP. Se duce o dreaptă ab paralelă cu δ_1, sprijinindu-se pe AB, AD și o dreaptă cd paralelă cu δ_2 și sprijinindu-se pe CD, CF. Dacă i și j sunt mijloacele segmentelor ab, cd, atunci I se găsește la intersecția dreptelor Ai, Cj. Paralele duse prin I la δ_1, δ_2 și mărginite la laturile patrulaterului dat, dau paralelogramul LMNP.

Deoarece problema nu precizează pe care laturi ale patratului se sprijină diagonala paralelă cu δ_1 (respectiv cea paralelă cu δ_2) și cum cu ajutorul a patru drepte (laturile patrulaterului) se pot forma șase grupe de câte două, problema va admite *șase soluții.*

Observări. 1° Cum în pr. 407 nu se precizează direcția uneia din diagonale (căci direcția celeilalte rezultă imediat), prima problemă admite ∞^6 soluții.

2° Se poate întâmpla ca patrulaterul ABCDEF să fie degenerat. Avem două cazuri: a) Vârfurile B, C, D sunt colineare, adică figura este formată din trei drepte concurente tăiate de o secantă. Problemele se rezolvă analog numai că numărul soluțiilor se împuținează, și anume, pr. 782 va avea *trei*, iar problema 407, ∞^3 soluții. b) Toate vârfurile se confundă, adică figura este formată din patru drepte concurente. In cazul acesta problema este în general imposibilă. Dacă una, din cele șase perechi de drepte ce se formează, Ai, C$j \equiv$ Aj se confundă, avem soluții. Dacă avem o soluție, avem *o infinitate* (pentru ambele probleme).

3° Numărul de soluții se poate împuțina și dacă una din direcțiile δ_1, δ_2 este parelelă cu una din laturile patrulaterului dat. Anume: a) dacă δ_1 este paralelă cu una din laturile patrulaterului, ne rămân *trei* soluții pentru probl. 782 și ∞^3 soluții pentru pr. 407. b) dacă δ_1 și δ_2 sunt paralele cu câte una din laturile patrulaterului dat, ne rămân *două* soluții pentru pr. 782 și ∞^2 soluții pentru 407.

4° Soluțiile primite nu pot fi menționate.

Gh. Th. Gh.

Problema 458. — *O dreaptă ce trece prin centrul* I *al cercului înscris în triunghiul* ABC *taie cercurile* BIC, CIA, AIB *respectiv în* P_a, P_b, P_c. *Fie* A′, B′, C′ *trei puncte colineare pe laturile lui* ABC. *Fie* A″, B″, C″ *intersecțiile dreptelor* P_aA', P_bB', P_cC' *respectiv cu cercurile* BIC, CIA, AIB. *Tangentele în* A″, B″, C″ *respectiv la cercurile* BIC, CIA, AIB *taie laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

MICU GRÜNBAUM

Soluțiune și Generalizare dată de D-l C. Coșniță și N. N. Mihăileanu. Vom arăta că proprietatea din enunț se menține în cazul când I este un punct oarecare în planul triunghiului. Notăm cu α, β, γ punctele în cari dreapta dusă prin I taie laturile BC, CA, AB și cu D, E, F punctele în cari tangentele duse la cele 3 cercuri respectiv în A″, B″, C″ taie aceleași laturi.

După o teoremă cunoscută, avem:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\overline{A''B^2}}{\overline{A''C^2}}.$$

În triunghiul $A''BC$ avem însă,

$$\frac{A''B}{A''C}=\frac{\sin A''CB}{\sin A''BC}.$$

Dar: $\sphericalangle A''CB=\sphericalangle BP_aA'$, $\sphericalangle A''BC=\sphericalangle CP_aA'$, iar în triunghiurile: BP_aA', CP_aA', avem:

$$\frac{\sin BP_aA'}{A'B}=\frac{\sin A'}{P_aB},\quad \frac{\sin CP_aA'}{A'C}=\frac{\sin A'}{P_aC}$$

şi împărţind:

$$\frac{\sin BP_aA'}{\sin CP_aA'}=\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{P_aC}{P_aB}.$$

Deci:

$$\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{P_aC}{P_aB}.$$

In triunghiurile αP_aB, αP_aC avem:

$$\frac{P_aB}{\sin\alpha}=\frac{\alpha B}{\sin\alpha P_aB},\quad \frac{P_aC}{\sin\alpha}=\frac{\alpha C}{\sin\alpha P_aC}$$

şi impărţind:

$$\frac{P_aC}{P_aB}=\frac{\alpha C}{\alpha B}\cdot\frac{\sin\alpha P_aB}{\sin\alpha P_aC}.$$

Însă:

$$\sphericalangle\alpha P_aB=180^0-\overset{\frown}{BP_aI}=180^0-\overset{\frown}{ICB},$$
$$\sphericalangle\alpha P_aC=IBC$$

şi

$$\frac{\sin ICB}{\sin IBC}=\frac{IB}{IC},$$

deci,

$$\frac{P_aC}{P_aB}=\frac{\alpha C}{\alpha B}\cdot\frac{IB}{IC},\text{ apoi: }\frac{A''B}{A''C}=\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{\alpha C}{\alpha B}\cdot\frac{IB}{IC}.$$

Rezultă în definitiv relaţiunea:

$$\frac{DB}{DC}=\left(\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{\alpha C}{\alpha B}\cdot\frac{IB}{IC}\right)^2.$$

În acelaş mod vom găsi şi relaţiunile:

$$\frac{EC}{EA}=\left(\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{\beta A}{\beta C}\cdot\frac{IC}{IA}\right)^2,\ \frac{FA}{FB}=\left(\frac{C'A}{C'B}\cdot\frac{\gamma B}{\gamma A}\cdot\frac{IA}{IB}\right)^2.$$

Înmulţind şi ţinând seamă că avem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=+1,\quad \frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\beta C}{\beta A}\cdot\frac{\gamma A}{\gamma B}=+1,$$

căci grupurile de puncte (A', B', C'), (α, β, γ) sunt colineare, deducem:

$$(1)\qquad \frac{DB}{DC}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FA}{FB}=+1,$$

deci punctele D, E, F sunt colineare şi proprietatea este dovedită.

Observări. I. D-l *C. Coşniţă* ne trimete următoarele observări. a) Din demonstraţia de mai sus se vede că proprietatea subsistă încă, atunci când A', B', C' sunt picioarele a 3 ceviene în triunghiul ABC. In adevăr, atunci avem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=-1,$$

şi relaţia (1) încă subsistă.

Deasemenea se poate demonstra ca mai sus că proprietatea se menţine şi atunci când înlocuim punctele α, β, γ cu punctele unde cevienele AI, BI, CI taie din nou cercurile BIC, CIA, AIB, punctele A', B', C' fiind şi în acest caz 3 puncte colineare sau picioarele a 3 ceviene în triunghiul ABC.

b) Să transformăm prin polare reciproce teorema, luând centrul cercului director în I. Cele trei cercuri se vor transforma în 3 parabole (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c) având focarul comun I şi tangente la câte 2 laturi ale triunghiului. (Γ_a), de exemplu, e tangenta laturilor AB, AC. Dreapta care trece prin I devine un punct la infinit, iar punctele P_a, P_b, P_c fiind situate pe acea dreaptă se vor transforma în 3 drepte paralele tangente celor 3 parabole. In fine, punctele A', B', C' se transformă în 3 ceviene. Proprietatea nouă se enunţă astfel: *In triunghiul oarecare* ABC *fie* AA', BB', CC' 3 *ceviene. Se duc la cele trei parabole de mai sus* (Γ_a), (Γ_b), (Γ_c) *tangente paralele cu o direcţie dată. Tangenta dusă la* (Γ_a), *taie pe* AA' *în* α. *Fie* α' *punctul de contact al tangentei care se mai poate duce din* α *la* (Γ_a), *iar* β', γ' *punctele analoage. Dreptele* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sunt concurente.

Gh. Th. Gh.

Problema 548. — *Se dau n forţe concurente care formează două câte două unghiuri egale şi ale căror extremităţi descriu o elipsă dată cu centrul în punctul lor comun. Se cere locul geometric al extremităţei rezultantei lor.*

ION DILI SCHILERU

Soluţia. Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt doi diametri conjugaţi ai elipsei date, ecuaţia ei vectorială este

$$\bar{r}=\bar{a}\cos\theta+\bar{b}\sin\theta.$$

Fie $\sphericalangle\varphi=\sphericalangle(\bar{F}_i, \bar{F}_{i+1})$, $\bar{F}_i$ fiind forţele date. Conform enunţului vom avea

$$\bar{F}_1=\bar{a}\cos\theta+\bar{b}\sin\theta,$$
$$\bar{F}_2=\bar{a}\cos(\theta+\varphi)+\bar{b}\sin(\theta+\varphi),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{F}_n=\bar{a}\cos[\theta+(n-1)\varphi]+\bar{b}\sin[\theta+(n-1)\varphi].$$

Din aceste relaţii rezultă pentru rezultanta $\bar{R}$ valoarea

$$\bar{R}=\sum_1^n \bar{F}_i=\bar{a}\sum_1^{n-1}\cos(\theta+i\varphi)+\bar{b}\sum_1^{n-2}\sin(\theta+i\varphi)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\left\{\bar{a}\cos\left[\theta+\tfrac{1}{2}(n-1)\varphi\right]+\bar{b}\sin\left[\theta+\tfrac{1}{2}(n-1)\varphi\right]\right\},$$

care ne spune că atunci când θ variază (φ=const prin ipoteză), extremitatea lui R descrie o elipsă concentrică şi omotetică cu prima, raportul de omotetie fiind

$$\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Când acest raport este egal cu unitatea, adică

$$\sin\tfrac{1}{2}n\varphi=\sin\tfrac{1}{2}\varphi,$$

de unde

$$\tfrac{1}{2}n\varphi=k\pi+\tfrac{1}{2}(-1)^k\varphi \quad \therefore \quad \varphi=\frac{2k\pi}{n+(-1)^{k+1}}$$

(k şi n întregi şi pozitivi), cele două elipse se confundă.

Gh. Th. Gh.

Problema 1618. — *Să se găsească un cub de şase cifre, astfel ca numărul format de una din grupele de două cifre consecutive, să fie egală cu suma celorlalte două grupe formate din cifre consecutive.*

V. THÉBAULT

Soluţie dată de D-l *Eug. Wegener* (Bucureşti). Fie $N^3=abcdef$. Avem trei cazuri după cum: I) $ab=cd+ef$, II) $cd=ab+ef$, III) $ef=ab+cd$. În primul caz, relaţia I) se mai poate scrie

$$10a+b=10c+d+10e+f;\ d+f-b=10(a-c-e).$$

Această relaţie spune că $d+f-b$ este un multiplu de 10 şi cum d, f sunt maximum 9, $a-c-e=0$ sau 1. Căutând într'o tablă de cuburi pe cele care satisfac aceste condiţii se găseşte soluţia:

$$140608=52^3.$$

Cazurile II) şi III) se tratează analog. In cazul al doilea nu avem soluţii, iar în cazul al treilea se găsesc soluţiile

$$551368=82^3 \text{ şi } 970299=99^3.$$

Gh. Th. Gh.

Problema 1714. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+yz+zx=3(1-a) \\ (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)=a^3 \end{cases}$$

LT. C. D. IONESCU-ŢIU

Soluţia dată de D-l Prof *Hr. Şt. Dăscălescu, I. A Neguţ* şi *Eug. Wegener*. Ultima ecuaţie se scrie

$$1-\Sigma x^2+\Sigma x^2y^2-x^2y^2z^2=a^3.$$

Cele două sume ce figurează în această relaţie se calculează ridicând la pătrat primele două ecuaţii. Avem succesiv

$$\Sigma x^2+2\Sigma xy=4 \quad \therefore \quad \Sigma x^2=2(3a-1),$$
$$\Sigma x^2y^2+2xyz\Sigma x=9(1-a^2) \quad \therefore \quad \Sigma x^2y^2=9(1-a)^2-4xyz,$$

valori cari introduse în relaţia de mai sus, dă ecuaţia

$$(xyz)^2+4(xyz)+a^3-9a^2+24a-12=0.$$

Notând cu $\alpha_i\ (i=1,2)$ rădăcinile acestei ecuaţii, necunoscutele x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiilor,

$$t^3-2t^2+3(1-a)t-\alpha_i=0. \qquad (i=1,2)$$

Sistemul dat admite două grupe de soluţii.

Gh. Th. Gh.

Problema 1811. — *Să se arate că*

$$C_{5n}^5-C_5^1\sum_{i=0}^{3}C_n^{5-i}C_{4n}^i+C_5^2C_n^2\sum_{i=0}^{1}C_{i+2}^1C_n^{3-i}C_n^i=n^5.$$

MARIA MEUMANN

Soluţia. Prima parte a identităţii din enunţ se scrie dezvoltat,

$$E=C_{5n}^5-C_5^1(C_n^5C_{4n}^0+C_n^4C_{4n}^1+C_n^3C_{4n}^2+C_n^2C_{4n}^3)+$$
$$+10C_n^2(C_2^1C_n^3C_n^0+C_3^1C_n^2C_n^1)$$
$$=\tfrac{1}{24}n(5n-1)(5n-2)(5n-3)(5n-4)-$$
$$-\tfrac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)-$$
$$-\tfrac{5}{6}n^2(n-1)(n-2)(n-3)-$$
$$-\tfrac{5}{3}n^2(n-1)(n-2)(4n-1)-$$
$$-\tfrac{5}{3}n^2(n-1)(4n-1)(4n-2)$$
$$+\tfrac{5}{3}n^2(n-1)^2(n-2)+\tfrac{15}{2}n^3(n-1)^2,$$

şi problema se reduce la a face calculul, făcând reducerile de termeni asemeni, grupând termenii, ş. a. m. d. Acest calcul se poate face, de exemplu, în modul următor:

$$E=\frac{1}{24}n\{(625n^4-1250n^3+875n^2-250n+24)-$$
$$-(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)-$$
$$-20n(n-1)[(n^2-5n+6)+2(4n^2-9n+2)+$$
$$+2(16n^2-12n+2)-2(n^2-3n+2)]+180n^2(n-1)^2\}$$
$$=\frac{1}{6}n^2[(156n^3-310n^2+210n-50)-$$
$$-5(n-1)(39n^2-41n+10)+45n(n-1)^2]$$
$$=\frac{1}{2}n^3[(-13n^2+30n-15)+15(n-1)^2]=n^4.$$

Observări. 1) Autoarea problemei a obținut identitatea din enunț plecând dela următoarea problemă: *Să se găsească numărul polinoamelor distincte ce se obțin din expresia,*

$$P_5=a_p x+b_p y+c_p z+d_p u+e_p v$$

când: $p=1, 2, \ldots, n$.

2) La această problemă simplă nu s'a primit nici o soluție.

Gh. Th Gh.

Problema 1907*). *Să se găsească un pătrat de forma* $\overline{abcdb}$, *în care* $\overline{cdb}$ *este un bipătrat, iar* $\overline{ac}$ *un pătrat.*

OSCAR SORIAN

Soluția. Singurele bipătrate de trei cifre sunt 256 și 625. Cum $\overline{ac}$ este un pătrat, soluția 256 nu este acceptabilă, deoarece un pătrat perfect nu se poate termina cu 2. Numărul căutat este deci de forma $\overline{a5625}$. Cum $\overline{ac}=\overline{a6}$, trebuie ca: $a=1$ sau 6, adică singurele soluții posibile sunt 15625, 35625, dintre cari numai primul este un pătrat perfect: $15625=125^2$.

Soluții date de d-nii: L-t *Boerescu P. G.* (Constanța), *Cârlan S. N.* (Tecuci), *Chiriac C.*, *Enăchescu Gr. I.* (Timișoara), *Giurconiu M.*, *Gligor N. I.* (Timișoara), *Godea I.*, *Ionescu F. P.* (Craiova), *Popescu I. Adr.* (Timișoara), *Stanciu A. P.* (Timișoara), *Țarălungă Savel* (Iași), *Tiucu C. C.* (Timișoara), *Vasiliu D.* (Timișoara) și *Wegener Eug.* (București).

Gh. Th Gh.

Problema 1951. — *În triunghiul* ABC *se duce o ceviană din* B. *Fie* B_1 *intersecția ei cu* AC *și* P *mijlocul segmentului* BB_1. AP *taie pe* BC *în* A_1: *paralela din* A_1 *la* AB *întâlnește pe* BB_1 *în* Q *și* AQ *taie pe* BC *în* M. *Fie* N *mijlocul segmentului* A_1Q. *Să se arate că: 1°* M, N, P *sunt colineare; 2°.* $2\overline{B_1A}\cdot\overline{QM}=\overline{B_1C}\cdot\overline{QA}$.

DINU D. BUZNEA

Soluția. 1° Cum punctele M, N, P se găsesc pe laturile triunghiului BQA_1, conform reciprocei teoremei lui *Menelaus* va trebui să demonstrăm că,

$$(1)\qquad \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}}\cdot\frac{\overline{NQ}}{\overline{NA_1}}=1.$$

Din asemănarea perechilor de triunghiuri (MA_1Q, MBA) și (A_1PQ, APB) scoatem relațiile

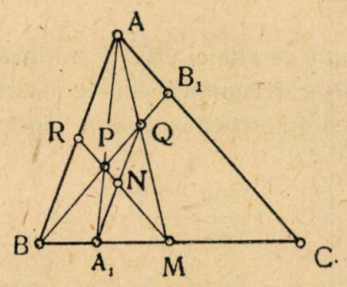


Fig. 1.

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{A_1Q}}{\overline{BA}},\quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1Q}},$$

cari prin înmulțire dau,

$$\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}}=-1.$$

În baza acestei relații, (1) se reduce la $\overline{NQ}=-\overline{NA_1}$ egalitatea adevărată în baza enunțului.

2° Fie R punctul unde dreapta MNP taie pe AB. Deoarece A_1Q este paralelă cu AB,

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}=\frac{\overline{NQ}}{\overline{NA_1}}=-1,$$

adică R este mijlocul lui AB. Dreapta RP unind mijloacele laturilor BA și BB_1 în triunghiul ABB_1 este paralelă cu AC și deci taie și pe BC la mijloc, adică $2\overline{MC}=\overline{BC}$. Triunghiul AMC tăiat de transversala BB_1 dă relația,

$$\frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1C}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{QM}}{\overline{QA}}=1,$$

care în baza penultimei relații se transformă tocmai în relația cerută de enunț.

Au rezolvat problema D-nii: *Viorel D. Cristea*, *Vasile David*, *Gh. M Dobrotescu*, *G. Manolescu* și *I. I. Novac*.

Gh. Th. Gh.

Problema 2320. — *Să se demonstreze că într'un triunghiu semidreptunghic* ($A=45^0$) *avem relațiile,*

*) Enunț rectificat.

$$\frac{h_b}{h_c}=\frac{(2p-c)\,sp\frac{C}{2}}{(2p-b)\,sp\frac{B}{2}},\quad h_b h_c=\frac{2s\,sp\,B\,sp\,C}{\sin A},$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

CRISTEA CHESARU

Soluţie. 1°. Ţinând seamă de notaţiile obişnuite într'un triunghiu ABC, putem scrie,

$$2s=b\,.\,h_b=c\,.\,h_c,$$

de unde

$$(1)\qquad \frac{h_b}{h_c}=\frac{c}{b}.$$

Teorema 2-a din „*Trigonometria patratică*“ p. 48, dela triunghiurile semidreptrice, ne dă însă,

$$b=(a+c)\sqrt{2}\,sp\frac{B}{2}=(2p-b)\sqrt{2}\,sp\frac{B}{2},$$

$$c=(a+b)\sqrt{2}\,sp\frac{C}{2}=(2p-c)\sqrt{2}\,sp\frac{C}{2},$$

valori, pe care întroducându-le în (1) şi apoi simplificând, obţinem

$$\frac{h_b}{h_c}=\frac{(2p-c)\,sp\frac{C}{2}}{(2p-b)\,sp\frac{B}{2}}.$$

Astfel, prima relaţie din enunţ este stabilită.

2°. Ducem, în triunghiul semidreptunghic ABC, înălţimile $B B_1=h_b$, $C C_1=h_c$, apoi în triunghiurile semidreptice $A B B_1$ şi $A C C_1$, aplicând teorema 1-a din „Trig. patratică“ p. 47, avem,

$$h_b=c\,sp\,B,\quad h_c=b\,sp\,C,$$

relaţii pe care înmulţindu-le, obţinem

$$(2)\qquad h_b h_c=b\,c\,sp\,B\,sp\,C.$$

Dar, din „Trigonometria circulară“ ştim că suprafaţa triunghiului A B C este dată de relaţia,

$$s=\frac{b\,c\sin A}{2},$$

de unde

$$bc=\frac{2s}{\sin A},$$

valoare care întrodusă în (2) ne dă,

$$h_b h_c=\frac{3s\,sp\,B\,sp\,C}{\sin A}.$$

Relaţia 2-a din enunţ este şi ea stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C-tin*, *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Giurconiu Mihail* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T), şi *Stanciu Petre* (P. T.).

Problema 2345. — *Dacă numărul întreg n nu conţine factorii 3 şi 5, atunci aceşti factori se găsesc negreşit în numerile întregi* n^2-1 *şi* n^2+1.

D POMPEIU

Soluţie. Numerile cari nu sunt multipli nici de 3, nici de 5, sunt de una din formele:

$$n=\text{mult. } 15\pm 1;\quad n=\text{mult. } 15\pm 2;$$
$$n=\text{mult. } 15\pm 4;\quad n=\text{mult. } 15\pm 7.$$

Ridicând la patrat, obţinem respectiv

$$n^2=\text{mult. } 15+1;\quad n^2=\text{mult. } 15+4;$$
$$n^2=\text{mult. } 15+16=\text{mult. } 15+1;$$
$$n^2=\text{mult. } 15+49=\text{mult. } 15+4.$$

Din aceste relaţii, deducem încă respectiv,

$n^2-1=$ mult. 15; $n^2-1=$ mult. $15+3$ sau,
$n^2+1=$ mult. $15+5$; $n^2-1=$ mult. 15;
$n^2-1=$ mult. $15+3$, sau $n^2+1=$ mult. $15+5$.

Din aceste egalităţi rezultă că factorii 3 şi 5 se pot găsi ambii în numărul n^2-1; ei se găsesc însă fiecare, respectiv în n^2-1 şi n^2+1.

Soluţie analoagă, dată de d-l *Chiriac C-tin.*

Soluţii particulare — considerând că *n* n'are factorul 3, sau n'are factorul 5 — date de d-nii: *Fränkel David* (P. T). *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Haret Radu* (Bucureşti), *Şchiopu Ioan* (P. T.), *Sasu Ioan* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Liceul Matei Basarab Bucureşti), *Tincu C-tin* (P. T.), *Tripa Iosif* (Lic. Milit, Timişoara). *Vrânceanu G.* (Lic. Milit. Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 2379. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$4p^3x^3-4p^3x^2+p(ab+bc+ca)x-2Rs=0,$$

unde a, b, c, R, s sunt elementele cunoscute ale unui triunghiu oarecare A B C.

LT C-DOR C. V. COSTACHESCU

Soluţie. Ecuaţia dată, împărţită prin $4p^3$, devine

$$(1)\qquad x^3-x^2+\frac{ab+bc+ca}{4p^2}x-\frac{abc}{8p^3}=0,$$

fiindcă s'a ţinut seama de relaţia cunoscută,

$$4Rs=abc,$$

Compléments de Trigonométrie, par „F. G. M", p. 210).

Scriind acum, relaţiile cunoscute între rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei (1) şi coeficienţii săi, observăm că putem scrie,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 = \frac{a}{2p} + \frac{b}{2p} + \frac{c}{2p}$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{ab + bc + ca}{4p^2} =$$

$$= \frac{a}{2p} \cdot \frac{b}{2p} + \frac{b}{2p} \cdot \frac{c}{2p} + \frac{c}{2p} \cdot \frac{a}{2p},$$

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{abc}{8p^3} = \frac{a}{2p} \cdot \frac{b}{2p} \cdot \frac{c}{2p}.$$

Rezultă clar de aci, că rădăcinele ecuaţiei date sunt

$$x_1 = \frac{a}{2p}, \quad x_2 = \frac{b}{2p}, \quad x_3 = \frac{c}{2p},$$

sau acelea ce se obţin prin permutări circulare.

Soluţii date de d-nii: *Birănaş Ioan* (P. T.), *Constantinescu Ilie* (P. T.), *Ellmann Marcel* (P. T.), *Filimon Decebal* (Lic. Deva), *Giurconiu Mihai* (P. T.), *Grigore Gh.* (student), *Guttman Tiberiu* (P. T.), *Novac Ioan* (P. T.), *Pali Sergiu* (P. T.), *Popa Vasile* (P. T.), *Popescu D-tru* (P. T.), *Serengău Mihai* (P. T.), *Stanciu Petre* (P. T.), *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), şi *Tincu C-tin* (P. T.).

Observare. Autorul observă că rădăcinele ecuaţiei date se mai pot scrie sub forma,

$$x_1 = sp\,\alpha, \quad x_2 = sp\,\beta, \quad x_3 = sp\,\gamma,$$

unde α, β, γ sunt unghiurile asociate triunghiului ABC, („Trigonomctria patratică, p. 52).

PROBLEME PROPUSE

2563. — Să se găsească patratele perfecte de câte 9 cifre $abcdefghi$ şi $ghidefabc$ ale căror rădăcini sunt numerile de câte 5 cifre $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ şi $\delta\varepsilon\gamma\alpha\beta$.

G-L GH. BUICLIU

2564. — Să se arate că expresia

$$125 \times 27^{3n+1} \times 5^{9n} - 4^{3n+1} \times 11^{2(3n+1)},$$

se divide prin 2891.

MIHAI GIURCONIU

2565. — Să se scrie expresia,

$$\sqrt{a^2(a^2+1) - b^2(b^2-1) + 2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}} -$$

$$\sqrt{a^2(a^2+1) - b^2(b^2-1) - 2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}},$$

sub forma cea mai simplă.

GH TH. GHEORGHIU

2566. — Să se afle derivata funcţiei,

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

şi apoi să se studieze variaţia funcţiei,

$$z = 4\sqrt{x} \cdot y',$$

y' fiind derivata lui y.

V. ALACI

2567. — Se consideră două cercuri O şi O′ tangente în punctul T. Prin T se duce o secantă variabilă care întâlneşte cercul O în M. Să se găsească şi să se construiască locul geometric al intersecţiei tangentei în M la cercul O cu paralela la TM dusă prin centrul cercului O′. Discuţie.

EUGEN WEGENER

2568. — Să se arate că înălţimea unui triunghiu ABC, corespunzătoare laturei $BC = p + \lambda$, unde p este o lungime constantă, iar λ o lungime variabilă, este constantă, dacă

$$\operatorname{tg} B = \frac{2\lambda}{p+\lambda} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\lambda}{p}.$$

MARIA NEUMANN

2569. — Din punctul A situat la cota de 1250m., vârfurile C şi B situate în acelaş plan cu A, se văd direct sub unghiurile $\gamma = 45^0$ şi $\beta = 20^0$, şi indirect prin reflexia pe suprafaţa lacului în punctele E şi D sub unghiurile $\varepsilon = 30^0$ şi $\delta = 65^0$. Cota suprafeţei lacului este 1200 m

AUREL BARGLAZAN

2570. — Dacă $\alpha < 30^0$, să se stabilească relaţia

$$2\,cp\,3\alpha\; sp\,2\alpha\; sp\,\alpha - 1) = sp\,3\alpha - cp\,2\alpha - cp\,\alpha.$$

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

ERATĂ.

1) Problema D lui G-l *Gh. Buicliu*, din numărul trecut, are no. 2562

2) Problema 979 având enunţul greşit se anulează.

3) Problema 1454 se anulează fiind identică cu problema 1437.

4) Problema 2418 se anulează fiind identică cu problema 386.

5) Problema 1898 se anulează fiind identică cu problema 1571.

TABLOU

de candidaţii reuşiţi la examenul de admitere din 10 — 12 Octomvrie 1947.
FACULTATEA DE ELECTROMECANICĂ
POLITEHNICA TIMIŞOARA.

1. **Cioară Gh. Alexandru** (Lic. Samuil Vulcan Beiuş).
2. **Sălăgeanu I. Traian** (Lic. „Traian" T. Severin).
3. **Blaga E. Ovidiu** (Lic. „Gh. Barițiu" Cluj).
4. **Centea C. Ovidiu Cornel** (Lic. „Gh. Barițiu" Cluj).
5. **Nowy C. Otto** (Lic. „Piarist" din Timişoara).
6. **Bălă V. Constantin** (Lic. T. Vladimirescu T. Jiu).
7. **Răuț Titus Adrian** (Lic. Mil. „M. Viteazul" Tşoara).
8. **Nemoianu I. Constantin** (Lic. C. D. Loga Tşoara).
9. **Aldea C. Valentin** (Lic. St. Vasile Blaj).
10. **Borisievici N. Boros** (Lic. Aurel Vlaicu Orăştie).
11. **Turbuțiu Gh. Gheorghe** (Lic. Gh. Barițiu Cluj).
12. **Dănilă I. Sergjie** (Lic. Unirea Focşani).
13. **Seracin Eugen** (Lic. Decebal din Deva).
14. **Stănucă I. Aurel** (Colegiul Carol I. Craiova).
15. **Congu D. Teodor** (Lic. Reg. Ferdinand R. Sărat).
16. **Teodorescu C. Dan** (Lic. I. C. Brăteanu Piteşti).
17. **Halapi Ioan** (Lic. aplicație al Sem. Ped. Univ. maghiar Cluj).
18. **Paşca Gheorghe** (Lic. Moise Nicoara Arad).
19. **Jurchescu A. Martin** (Lic. Tr. Dola Caransebeş).
20. **Găbăuceanu M. Nicolae** (Lic. Traian T. Severin).
21. **Pană M. Corneliu** (Lic. Gh. Lazăr, Sibiu).
22. **Rădoi Arsenie Nicolae** (Lic. C. D. Loga, Tşoara).
23. **Moldoveanu Mircea** (Lic. Mircea c. bătrân, Cstanța).
24. **Erdely S. Ioan** (Lic. Israelit Timişoara).
25. **Fulea Dorin** (Lic. Gh. Lazăr, Sibiu).
26. **Postelicu Gheorghe** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
27. **Giurgiu O. Tudor** (Lic. Andrei Şaguna, Braşov).
28. **Creangă I. Nicolae** (Lic. Mircea c. Bătrân, Cstanța).
29. **Tăutu G. Mihai** (Lic. Em. Gojdu, Oradea).
30. **Căpățână I. Nicolae** (Lic. Sturza, Craiova).
31. **Gherlan Vasile** (Lic. Samuil Vulca, Beiuş).
32. **Sălcuțeanu Nicolae** (Lic. A. Lahovary, R. Vâlcea).
33. **Itoafă Alexandru** (Lic. Radu Negru, Făgăraş).
34. **Pop Alexandru** (Lic. Mil. M. Viteazul, T. Mureş).
35. **Iovănel Chiriac** (Colèg. C. D. Loga Timişoara).
36. **Veza N. Nicolae** (Lic. Tehn. Aeronautică, Mediaş).
37. **Scântee N. Valentin** (Lic. N. Bălcescu, Brăila).
38. **Szekely George** (Lic. Gh. Barițiu, Cluj).
39. **Indreaş I. Grigore** (Lic. Reg. Ferdinand, Turda).
40. **Ungureanu Correliu** (Lic. Dinicu Golescu, C. Lung).
41. **Cursaru C. Radu** (Lic. Reg. Ferdinand, R. Sărat).
42. **Platon M. Dumitru** (Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova).
43. **Makoldy Eugen** (Lic. Maghiar de Stat Satu-Mare).
44. **Roszinger M. Ştefan** (Lic. Em. Gojdu, Oradea).
45. **Țârnea D. Iuliu** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
46. **Funth Carmen** (Lic. Carmen Sylva, Timişoara).
47. **Anghelescu Gheorghe** (Lic. Dr. I. Maşotă, Braşov).
48. **Drăgoi Ion** (Lic. Andrei Şaguna, Braşov).
49. **Românu Ilie** (Lic. Tr. Doda, Caransebeş).
50. **Ursu Grigore** (L. Grănicoase „G. Coşbuc", Năsăud).
51. **Murărescu Vichente** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
52. **Iliaş Aladar** (Lic. rom. cat., Arad).
53. **Lăpuşanu Valentin** (Lic. Cor. Brediceanu, Lugoj).
54. **Preda Marius** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
55. **Ene P. Vasile** (Lic. M. Viteazul, Bucureşti).
55. **Avramescu Titus** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
57. **Stoian Mircea** (Lic. Ioniță Asa, Caracal).
58. **Sason Liviu** (Lic. N. Bălcescu, Brăila).
59. **Cârciu A. Ioan** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
60. **Dobândă Valentin** (Lic. Titu Maiorescu, Aiud).
61. **Grecu D. Nicolae** (Lic. Sf. Haralambie, T. Măgurele).
62. **Ionescu Marin** (Lic. Sf. Haralambie, T. Măgurele).
63. **Scurtu Gh. Valeriu** (Lic. A. Şaguna, Braşov).
64. **Simion Liviu** (Liceul Decebal, Deva).
65. **Ulăczey Ladislau** (Lic. Piarist, Timişoara).
66. **Munteanu Silviu** (Lic. Reg. Ferdinand, Turda).
67. **Frumuşanu I. Hristache** (Lic. Irdustrial, Galaţi).
68. **Cristescu Mihail** (Lic. Dr. I. Maşotă, Braşov).
69. **Radu Nicolae** (Lic. Industral, Craiova).
70. **Miscovici Ştefan** (Lic. Piarist, Timişoara).
71. **Zbârcea I. Ioan** (Lic. Reg. Ferdinand, R. Sărat).
72. **Petre Alexandru** (Lic. Aurel Vlaicu, Bucureşti).
73. **Popa Cornelia** (Lic. B. P. Haşdeu, Buzău).
74. **Lie Aurel** (Liceul Radu Negru, Făgăraş).
75. **Alexandrescu Nic.** (Lic. Mircea c. Bătr., Constanța).
76. **Thumerer I. Carol** (Lic. Piarist, Timişoara).
77. **Triteanu Octavian** (Lic. Reg. Ferdinand, Turda).
78. **Truşculescu Marin** (Lic. Traian, T. Severin).
79. **Iliescu C. Ioan** (Lic. Mircea c. Bătrân, Constanța).
80. **Cocârlă A. Dumitru** (Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova).
81. **Bărbulescu Ilie** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
82. **Bărăgia C. Alexandru** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
83. **Soporeanu Emil** (Lic. Reg. Ferdinand, Turda).
84. **Mateescu T. Theorghe** (Lic. D. Dobrescu, Călăraşi).
85. **Teodorescu Nicolae** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
86. **Armencoiu Nicolae** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).
87. **Duțu Ion** (Lic. „Mihai Viteazul", Bucureşti).
88. **Solomon L. Eugen** (Lic. C. D. Loga, Timişoara).

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Cănescu Şt. Traian (2496, 2497, 2512, 2537, 2546); *Vincenzo G. Cavallaro* (N); *Constantinescu I. Gheorghe* (2508, 2509, 2512, 2513, 2522, 2537, 2546, 2553); *Deutsch Emeric* (2054, 2057, 2087, 2110, 2193, 2325, 2330, 2371, 2375. 2399, 2460, 2505, 2508, 2509, 2513, 2519, 2535, 2550); *Hurezeanu Romulus* (1799, 1827, 2217, 2233, 2234, 2276, 2250, 2298, 2513, 2524, 2531, 2535, 2555); *Iovănel Chiriac* (2499, 2523, 2530, 2531, 2535); *Man Iosif* (P); *Moldovan Mircea* (P); *Munteanu Giuseppe* (2325, 2460, 2490, 2498, 2519, 2535, 2549, 2550); *Neguţ A. Ionel* (2537, 2546, 2553); *Neumann Maria* (A); *Novac I. Ioan* (1385, 1389, 1405, 1413, 1414, 1447, 1483, 1493, 1494, 1516, 1558, 1582, 1640, 1653, 1656, 2545, 2546, 2547, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2560); *Pantea Alexandru* (2513, 2516, 2522, 2530, 2537, 2546, 2550, 2555); *Râmboiu Septimiu* (2362, 2427, 2450, 2452, 2469, 2498, 2505, 2522, 2531, 2532, 2535); *Stănilă George* (2193, 2261, 2276, 2279, 2287, 2301, 2366, 2370, 2375, 2382, 2417, 2427, 2429, 2436, 2444, 2446, 2453, 2465, 4283, 2492, 2499, 2510, 2523, 2535).

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, şi nu în continuare.

3. *Dalea Gh.* (Salonta, Bihor). Aţi trimes 150 lei pnntru abonament la revistă. Fiind nou abonat trebue să trimiteţi 250 lei. La acoperirea acestei sume vi se vor trimite toate numerele din urmă.

4. *Şapse Mandy.* No. 6 vi s'a trimes la vreme.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

ANUL XXVII. DECEMVRIE 1947 No. 10.

lipsa 7
CTU R104
1—10

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 250 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 500 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 500 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN VISA**: ASUPRA UNOR CUBICE UNICURSALE. (URMARE).
2. NOTA MATEMATICA 21.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1741, 1784, 2247, 2353, 2371, 2519, 2522, 2535.
6. PROBLEME PROPUSE: 2563-2570.
7. INFORMATII.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Anunţăm cu plăcere că începând cu acest număr face parte din Comitetul de conducere al revistei şi d-l Ing. D Stănescu, Director în Uzinele Domeniilor Reşiţa. D-sa este un vechiu colaborator şi susţinător al revistei noaste.

Ţinem să aducem la cunoştinţa colaboratorilor noştrii următoarele:

1. D-l Prof. *I. Vodă* (Constanţa) a abonat la revistă 7 profesori de matematici dintre cari 2 profesori din Bulgaria. D-l Prof. *V. Neacşu*, unul din noui colaboratori, ne-a şi făcut printre elevii D-sale, 11 abonamente.

2. D-l Prof. *E. Vişa* (Timişoara) ne-a făcut 23 de abonamente printre elevii dela lic. *V. Babeş* din Timişoara, şi la stărnirea D-sale, liceul a mai abonat încă 10 elevi săraci.

3. D-l Prof. *Melenta Nica* (Salonta) ne-a făcut printre elevii D-sale, 5 abonamente.

4. D-l Prof. *N. Ducaru* (Cluj), ne-a făcut printre elevii D-sale, 4 abonamente.

Le mulţumim tuturor rugând şi pe alţi colegi să-i urmeze. În felul acesta revista va fi din ce în ce mai răspândită şi deci îşi va atinge din ce în ce mai bine scopul pe care-l urmăreşte.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Începând cu data de 15 Septembrie, costul abonamentului pe anul în curs este de 250 lei pentru particulari, şi de 500 lei pentru instituţii. În această sumă intră şi expediţia revistei.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV şi XXVI sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Harry Truman, Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — No. 10. TIMISOARA, DECEMBRIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 250 lei pentru particulari și 500 lei pentru instituții.

Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Harry Truman No. 1.

ASUPRA UNOR CUBICE UNICURSALE

DE

EUGEN VIȘA

(Urmare)

4. Teoremă. *Tangentele în punctul dublu al cubicei* (8) *sunt tocmai dreptele care unesc acest punct cu punctele în care conica directoare* (2) *este intersectată de dreapta* (Δ) *de ecuație* (3).

În adevăr, ecuația comună a celor două tangente în punctul dublu, adică în origină, se obține egalând cu zero grupul omogen al termenilor de gradul al doilea din ecuația (8), adică după (9):

$$Q(x, y) = 0 \tag{26}$$

sau explicit:

$$C(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) - 2(Ax + By)(a_{13}x + a_{23}y) = 0. \tag{27}$$

Pe de altă parte, dreapta de ecuație (4) care trece prin origină, taie după cum am văzut conica directoare (2) și dreapta (Δ), respectiv în punctele de abscise x_1 și x_2 date de relațiile (5). Scriind că aceste abscise sunt egale, ceeace de fapt însemnează a scrie că punctele respective sunt confundate, obținem condiția:

$$\frac{2(a_{13} + a_{23}m)}{a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2} = \frac{C}{A + Bm}$$

din care deducem apoi:

$$C(a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2) - 2(A + Bm)(a_{13} + a_{23}m) = 0,$$

pentru ca, înlocuind în sfârșit aici pe m cu valoarea dedusă din (4), să regăsim tocmai ecuația (27), ceeace învederează proprietatea din cuprinsul teoremei enunțate.

Corolar. Bazați pe proprietatea de mai sus, deducem că punctul dublu al cubicei unicursale (8) este un punct *nodal*, adică propriu zis, un punct de *întoarcere*, sau în sfârșit, un punct dublu *izolat* după cum respectiv, dreapta (Δ) este secantă conicei directoare, tangentă acestei conice sau neincidentă ei.

5. Teoremă. *Dacă dreapta* (Δ) *nu este paralelă cu nici una din direcțiunile asimptotice ale conicei directoare, una din asimptotele cubicei* (8) *este chiar această dreaptă, iar celelalte două asimptote ale ei sunt aceleași cu asimptotele simetricei conicei directoare față de punctul* O.

În adevăr, după prima notație din (9), observăm în prealabil că direcțiunile asimptotice ale cubicei (8) sunt date de ecuația:

$$P(x, y) = 0 \tag{28}$$

sau explicit:

$$(Ax + By)(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) = 0 \tag{29}$$

care, la rândul ei se descompune în:

$$\begin{cases} Ax + By = 0 \\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \end{cases} \tag{30}$$

ceeace arată că una din aceste direcțiuni este paralelă cu dreapta (Δ), iar celelalte două sunt paralele cu direcțiunile asimptotice ale conicei directoare, fiind respectiv reale și distincte, reale și confundate, sau imaginare, în acelaș timp cu ale acestei conice.

Pentru a determina acum pozițiile asimptotelor cubicei de ecuație (8), vom scrie această ecuație sub formă omogenă, așa cum am făcut și în (24). Or, dacă notăm încă pentru simplificare primul membru al ecuației (24) prin $F(x, y, z)$ și ținem în acelaș timp seama și de notațiile (9), este clar atunci că, restrâns, această ecuație se mai poate scrie și sub forma:

$$F(x, y, z) = P(x, y) + zQ(x, y) = 0. \tag{31}$$

Cu această notație nouă, urmează deci că, ecuația tangentei într'un punct oarecare de coordonate omo-

gene (x_0, y_0, z_0) al cubicei (24) este

$$(32)\quad x F'_x(x_0, y_0, z_0) + y F'_y(x_0, y_0, z_0) + z F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

aşa încât presupunând că $z_0 = 0$, deci că punctul respectiv este aruncat la infinit, ecuaţia de mai sus devine chiar ecuaţia asimptotei corespunzătoare acestui punct şi anume:

$$(33)\quad x F'_x(x_0, y_0, 0) + y F'_y(x_0, y_0, 0) + z F'_z(x_0, y_0, 0) = 0.$$

Cum însă pe de altă parte, din (31) deducem:

$$(34)\quad \begin{cases} F'_x(x, y, z) = P'_x(x, y) + z Q'_x(x, y) \\ F'_y(x, y, z) = P'_y(x, y) + z Q'_y(x, y) \\ F'_z(x, y, z) = Q(x, y), \end{cases}$$

rezultă:

$$(35)\quad \begin{cases} F'_x(x_0, y_0, 0) = P'_x(x_0, y_0) \\ F'_y(x_0, y_0, 0) = P'_y(x_0, y_0) \\ F'_z(x_0, y_0, 0) = Q(x_0, y_0), \end{cases}$$

astfel că ecuaţia (33) devine la rândul său:

$$(36)\quad x P'_x(x_0, y_0) + y P'_y(x_0, y_0) + z Q(x_0, y_0) = 0.$$

Or, dacă ne mai raportăm acum la (9), conchidem:

$$(37)\quad \begin{cases} P'_x(x, y) = A(a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2) \\ \qquad + 2(A x + B y)(a_{11} x + a_{12} y) \\ P'_y(x, y) = B(a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2) \\ \qquad + 2(A x + B y)(a_{12} x + a_{22} y) \end{cases}$$

şi deci:

$$(38)\quad \begin{cases} P'_x(x_0, y_0) = A(a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2) \\ \qquad + 2(A x_0 + B y_0)(a_{11} x_0 + a_{12} y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) = B(a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2) \\ \qquad + 2(A x_0 + B y_0)(a_{12} x_0 + a_{22} y_0) \end{cases}$$

apoi încă:

$$(39)\quad \begin{aligned} Q(x_0, y_0) = {} & C(a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2) \\ & - 2(A x_0 + B y_0)(a_{13} x_0 + a_{23} y_0) \end{aligned}$$

şi astfel ecuaţia (36) se va scrie:

$$(40)\quad \begin{aligned} & (a_{11} x_0^2 + 2 a_{12} x_0 y_0 + a_{22} y_0^2)(A x + B y + C z) \\ & + 2(A x_0 + B y_0)[(a_{11} x_0 + a_{12} y_0) x + \\ & + (a_{12} x_0 + a_{22} y_0) y - (a_{13} x_0 + a_{23} y_0) z] = 0. \end{aligned}$$

Avem dară în (40) ecuaţia generală în coordonate omogene a unei asimptote a cubicei de ecuaţie neomogenă (8) sau de ecuaţie omogenă (24) corespunzătoare direcţiei asimptotice al cărei punct dela infinit are coordonatele omogene $(x_0, y_0, 0)$.

Să presupunem atunci că este vorba în primul rând de punctul dela infinit al direcţiei asimptotice a dreptei (Δ). Or, coordonatele omogene ale acestui punct sunt (— B, A, 0), astfel încât, făcând înlocuirile respective în ecuaţia (40), aceasta devine:

$$(41)\quad (a_{11} B^2 - 2 a_{12} A B + a_{22} A^2)(A x + B y + C z) = 0$$

de unde, îndepărtând încă factorul

$$a_{11} B^2 - 2 a_{12} A B + a_{22} A^2$$

care este diferit de zero, căci prin ipoteză, dreapta (Δ) nu este paralelă cu nici una din direcţiile asimptotice ale conicei directoare, deducem:

$$(42)\quad A x + B y + C z = 0,$$

adică chiar ecuaţia dreptei (Δ) în coordonate omogene şi astfel prima parte a teoremei este învederată.

Să presupunem acum în al doilea rând că este vorba de unul oarecare din punctele dela infinit ale celor două direcţii asimptotice ale conicei directoare şi fie $(1, m, 0)$ coordonatele lui omogene. Urmează atunci că, prin înlocuirile respective, ţinând încă seama de faptul că în acest caz,

$$(43)\quad a_{11} + 2 a_{12} m + a_{22} m^2 = 0,$$

ecuaţia (40) devine:

$$(44)\quad \begin{aligned} & (A + B m)[(a_{11} + a_{12} m) x + (a_{12} + a_{22} m) y + \\ & + (a_{13} + a_{23} m) z] = 0 \end{aligned}$$

de unde, îndepărtând de astă dată factorul $A + Bm$ care este şi el diferit de zero, tot din cauză că dreapta (Δ) nu este paralelă cu nici una din direcţiile asimptotice ale conicei directoare, obţinem:

$$(45)\quad (a_{11} + a_{12} m) x + (a_{12} + a_{22} m) y + (a_{13} + a_{23} m) z = 0$$

pentru ca, eliminând apoi pe m între aceasta din urmă ecuaţie şi relaţia de condiţie (43), să deducem:

$$(46)\quad \begin{aligned} & a_{11}(a_{12} x + a_{22} y - a_{23} z)^2 - 2 a_{12}(a_{11} x + a_{12} y - a_{13} z) \cdot \\ & \cdot (a_{12} x + a_{22} y - a_{23} z) + a_{22}(a_{11} x + a_{12} y - a_{13} z)^2 = 0 \end{aligned}$$

care este ecuaţia comună în coordonate omogene a celorlalte două asimptote ale cubicei (24).

Considerând acum conica de ecuaţie omogenă:

$$(47)\quad f(x, y, z) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 - 2(a_{13} x + a_{23} y) z = 0$$

care este simetrica faţă de origină a conicei directoare şi ţinând seamă de relaţiile:

$$(48)\quad \begin{cases} f'_x(x, y, z) = 2(a_{11} x + a_{12} y - a_{13} z) \\ f'_y(x, y, z) = 2(a_{12} x + a_{22} y - a_{23} z) \end{cases}$$

conchidem uşor că, în coordonate neomogene, ecuaţia 46 se mai poate scrie:

$$(49)\qquad a_{11}(f'_y)^2 - 2a_{12}(f'_x)(f'_y) + a_{22}(f'_x)^2 = 0$$

care nu e decât ecuaţia comună a celor două asimptote ale conicei (47) şi astfel e învederată şi a două parte a teoremei enunţate.

Observare. Aceasta a doua parte a teoremei din urmă, în cazul când conica directoare este de gen elipsă sau iperbolă şi cu deosebire în cazul al doilea, se mai poate enunţa sub forma următoare:

Dacă dreapta (Δ) *nu este paralelă cu nici una din direcţiile asimptotice ale conicei directoare, presupusă cu centru, atunci două din asimptotele cubicei* (21) *sunt respectiv paralelele duse la asimptotele acestei conice prin simetricul centrului ei faţă de origina axelor, adică faţă de punctul dublu.*

6. Cubice unicursale cu directoare conice. Ne propunem acum, în această ultimă parte a studiului nostru, a da nişte criterii, după care să putem recunoaşte uşor dacă o cubică unicursală cu punctul dublu situat la distanţă finită, admite sau nu vreo conică directoare şi cum se poate determina acea conică în caz de existenţă.

Să considerăm dară o cubică unicursală cu punctul dublu situat la distanţă finită şi, pentru simplificare, să raportăm această cubică la un sistem de axe de coordonate rectangulare cu origina în punctul dublu.

Ecuaţia cubicei va fi atunci de forma:

$$(50)\qquad \begin{aligned} &A_1 x^3 + B_1 x^2 y + B_2 x y^2 + A_2 y^3 \\ &+ C_1 x^2 + 2D x y + C_2 y^2 = 0 \end{aligned}$$

sau, în coordonate omogene, de forma:

$$(51)\qquad \begin{aligned} &A_1 x^3 + B_1 x^2 y + B_2 x y^2 + A_2 y^3 \\ &+ (C_1 x^2 + 2D x y + C_2 y^2) z = 0. \end{aligned}$$

Vom deosebi două cazuri şi deci două criterii, după cum respectiv cubica dată este propriu zisă, ori degenerată.

Criteriul I. Teoremă. *O cubică unicursală propriu zisă cu punctul dublu situat la distanţă finită admite atâtea şi exclusiv atâtea conice directoare câte direcţiuni asimptotice simple are.*

În adevăr, fie

$$(52)\qquad \alpha x + \beta y = 0$$

una oarecare din direcţiunile asimptotice ale cubicei (51), pe care să o presupunem întâi simplă.

Urmează deci că avem o identitate de forma:

$$(53)\qquad \begin{aligned} &A_1 x^3 + B_1 x^2 y + B_2 x y^2 + A_2 y^3 \equiv \\ &(\alpha x + \beta y)(\alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} x y + \alpha_{22} y^2) \end{aligned}$$

şi cum am presupus că direcţiunea asimptotică (52) este simplă, deci că factorul $\alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} x y + \alpha_{22} y^2$ nu e divizibil prin $\alpha x + \beta y$, rezultă condiţia:

$$(54)\qquad \alpha_{11}\beta^2 - 2\alpha_{12}\alpha\beta + \alpha_{22}\alpha^2 \neq 0.$$

În afară de aceasta, cubica (51) fiind propriu zisă, este evident că nici expresia

$$C_1 x^2 + 2D x y + C_2 y^2$$

nu e divizibilă prin $\alpha x + \beta y$.

Vrem să arătăm însă că, în condiţiunile date, putem determina o cantitate constantă γ astfel încât expresia:

$$(55)\qquad \begin{aligned} R(x,y) = &\gamma(\alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} x y + \alpha_{22} y^2) \\ &- (C_1 x^2 + 2D x y + C_2 y^2) \end{aligned}$$

să fie divizibilă prin $\alpha x + \beta y$.

Aceasta revine la a dovedi că, alături de γ, se mai pot determina, în acelaş timp, alte două cantităţi constante α_{13} şi α_{23} aşa încât să avem identitatea:

$$(56)\qquad \begin{aligned} &\gamma(\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2) - (C_1x^2 + 2Dxy + C_2y^2) \\ &\equiv 2(\alpha x + \beta y)(\alpha_{13} x + \alpha_{23} y). \end{aligned}$$

În adevăr, prin identificare, din (56) deducem pentru γ, α_{13} şi α_{23} sistemul liniar de ecuaţii:

$$(57)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\gamma - 2\alpha\alpha_{13} = C_1 \\ \alpha_{12}\gamma - \beta\alpha_{13} - \alpha\alpha_{23} = D \\ \alpha_{22}\gamma - 2\beta\alpha_{23} = C_2 \end{cases}$$

al cărui determinant:

$$(58)\qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -2\alpha & 0 \\ \alpha_{12} & \beta & \alpha \\ \alpha_{22} & 0 & -2\beta \end{vmatrix} = -2(\alpha_{11}\beta^2 - 2\alpha_{12}\alpha\beta + \alpha_{22}\alpha^2),$$

în baza relaţiei (54) este diferit de zero. Urmează deci că sistemul (57) este compatibil şi bine determinat.

Rezolvând dară acest sistem (57) şi introducând apoi valorile lui γ, α_{13} şi α_{23} astfel determinaţi în relaţia (56), din respectiva relaţie vom deduce:

$$(59)\qquad \begin{aligned} C_1x^2+2D\,xy+C_2\,y^2=\gamma\,(a_{11}\,x^2+2a_{12}\,x\,y+a_{22}\,y^2)\\ -2\,(\alpha\,x+\beta\,y)\,(a_{13}\,x+a_{23}\,y)\end{aligned}$$

şi de unde, ţinând încă seama de relaţia (53), urmează numai decât că ecuaţia (51) se va putea pune sub forma:

$$(60)\qquad \begin{aligned}(\alpha\,x+\beta\,y+\gamma\,z)\,(a_{11}\,x^2+2\,a_{12}\,x\,y+a_{22}\,y^2)\\ -2\,(\alpha\,x+\beta\,y)\,(a_{13}\,x+a_{23}\,y)\,z=0\end{aligned}$$

care este absolut analoagă ecuaţiei (24) şi care ne arată numai decât că ecuaţiile în coordonate omogene:

$$(61)\qquad \begin{cases} a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2\,(a_{13}x+a_{23}y)\,z=0\\ \alpha\,x+\beta\,y+\gamma\,z=0\end{cases}$$

reprezintă respectiv o conică directoare a cubicei (51) şi dreapta (Δ) corespunzătoare acestei conice.

Să presupunem acum în al doilea rând că direcţiunea asimptotică (52) este dublă sau triplă.

Evident, avem şi de astă dată identitatea (53), dar, în locul relaţiei de condiţie (54), avem de astă dată egalitatea

$$(62)\qquad a_{11}\,\beta^2-2\,a_{12}\,\alpha\,\beta+a_{22}\,\alpha^2=0,$$

ceeace exprimă că factorul $a_{11}x^2+2a_{12}x\,y+a_{22}\,y^2$ este divizibil prin $\alpha\,x+\beta\,y$.

Cum însă expresia $C_1\,x^2+2\,D\,x\,y+C_2\,y^2$ nu este nici în acest caz divizibilă prin $\alpha\,x+\beta\,y$, după (55) se vede foarte bine că, indiferent ce valoare i-am atribui lui γ, prima parte a expresiei $R(x\,y)$ e întotdeauna divizibilă prin $\alpha\,x+\beta\,y$, în vreme ce a doua parte rămâne în continuu nedivizibilă.

Urmează deci că expresia lui $R(x,y)$ din (55) nu poate fi nici când divizibilă prin $\alpha\,x+\beta\,y$, de unde rezultă că, în aceasta a doua ipoteză, cubicei (51) nu-i corespunde nici o conică directoare.

În modul acesta este clar prin urmare că, aşa cum se afirmă în enunţul teoremei, o cubică unicursală propriu zisă de tipul (51) admite cu exclusivitate numai atâtea conice directoare câte direcţiuni asimptotice simple are.

Corolar. Din enunţul teoremei criteriului întâi rezultă numai decât că o cubică unicursală propriu zisă de tipul (51) admite întotdeauna cel puţin o conică directoare şi în speţă una sau trei, afară de cazul în care toate cele trei direcţiuni asimptotice ale ei sunt confundate, când nu admite nici o conică directoare.

Mai rezultă că în cazul a trei conice directoare, ele pot fi, sau toate trei reale şi distincte, sau una reală şi două imaginare.

Criteriul II. Teoremă. *O cubică unicursală degenerată cu punctul dublu situat la distanţă finită, admite întotdeauna cel puţin o conică directoare.*

În adevăr, ecuaţia unei astfel de cubice putându-se pune tot sub forma (51), constatăm că degenerarea ei poate avea loc exclusiv dacă, una carecare din expresiile

$$(63)\qquad \begin{cases} M(x,y)=A_1\,x^3+B_1\,x^2y+B_2\,x\,y^2+A_2\,y^3\\ N(x,y)=C_1\,x^2+2\,D\,x\,y+C_2\,y^2\end{cases}$$

este identic nulă, sau dacă aceste expresii admit un divizor comun de gradul întâi.

Or, dacă prima din aceste expresii este identic nulă, ecuaţia (51) se reduce la:

$$(64)\qquad (C_1\,x^2+2\,D\,x\,y+C_2\,y^2)\,z=0,$$

care se poate interpreta imediat ca un caz particular al ecuaţiei (24), anume în care

$$(65)\qquad A=B=0,$$

conica directoare fiind:

$$(66)\qquad C_1\,x^2+2\,D\,x\,y+C_2\,y^2=0,$$

iar dreapta (Δ) corespunzătoare, dreapta

$$(67)\qquad z=0$$

adică dreapta dela infinit a planului[7].

Dacă acum este identic nulă a doua expresia din (63), deducem la fel că ecuaţia (51) se reduce de astă dată la:

$$68)\qquad A_1\,x^3+B_1\,x^2y+B_2\,x\,y^2+A_2\,y^3=0$$

care, descompusă, poate fi adusă la forma:

$$(69)\qquad (\alpha\,x+\beta\,y)\,(a_{11}\,x^2+2\,a_{12}\,x\,y+a_{22}\,y^2)=0$$

adică tot la un caz particular al ecuaţiei (24), în care anume

$$(70)\qquad a_{13}=a_{23}=0,$$

conica directoare fiind:

---

[7]) Prin descompunerea expresiei $C_1\,x^2+2\,D\,x\,y+C_2\,y^2$ în factori se găsesc uşor încă două conice directoare ale cubicei degenerate (64), împreună cu dreptele (Δ) respectiv corespunzătoare.

(71) $$\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2=0,$$

iar dreapta (Δ) corespunzătoare:

(72) $$\alpha x+\beta y=0$$[8].

Dacă în sfârşit mai presupunem că expresiile (63) admit un divizor comun de gradul întâi, fie $\alpha x+\beta y$ acel divizor, deducem că numitele expresii se pot pune respectiv sub formele:

(73) $$\begin{cases} M=(\alpha x+\beta y)(\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2), \\ N=-2(\alpha x+\beta y)(\alpha_{13}x+\alpha_{23}y) \end{cases}$$

şi deci că ecuaţia (51) se reduce la:

(74) $$(\alpha x+\beta y)[(\alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2)-2(\alpha_{13}x+\alpha_{23}y)]=0$$

care, se vede la fel că este un caz particular al ecuaţiei (24), conica directoare şi dreapta (Δ) corespunzătoare fiind respectiv:

(75) $$\begin{cases} \alpha_{11}x^2+2\alpha_{12}xy+\alpha_{22}y^2+2\alpha_{13}x+2\alpha_{23}y=0 \\ \alpha x+\beta y=0 \end{cases}$$

şi astfel, cu acest din urmă caz, e învederat prin-urmare că orice cubică unicursală degenerată de tipul (51) admite cel puţin o conică directoare.

NOTE MATEMATICE

21. — *Triangles et carrés numeriques.*

1. Ecrivons:

(I)

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
.	.	.	.	.	.

(II)

1	1	1	1	1	1 ...
1	2	3	4	5	6 ...
1	3	6	10	15	21 ...
1	4	10	20	35	56 ...
1	5	15	35	70	126 ...
1	6	21	56	126	252 ...
.	.	.	.	.	. ...

Le triangle (I) des coefficients du binome de *Newton* on dit de *Tartaglia;* le carré (II) on appelle des *nombres figurés*. On peuvent considerer (I), (II) comme réciproquement réalisables à l'aide d'un successif déplacement des colonnes d'une convenable quantité égale dans même direction ou en direction opposée. En (I) un élément A est égal à l'élément B qui est immediatement au dessus plus l'élément C qui est immediatement à gauche de B (A = B + C; en (II) un élément P est égal à l'élément M qui est imm. à gauche de P plus l'élément N qui est imm. au dessus de P même. (P = M + N). Triangles et carrés du type (I), (II) s'en peuvent former arbitrairement sans fin et aussi avec loi générative plus général (par exemple $P=x.M+N$) mais *est important trouver une compendieuse représentation analitique.*

2. *L. B. Francoeur* (*Cours de Math.* Vol. II, p. 23, Firenze 1841) donne la suivante généralisation de (II):

1	∂	∂	∂ . .
1	$1+\partial$	$1+2\partial$	$1+3\partial$ ...
1	$2+\partial$	$3+3\partial$	$4+6\partial$ ...
1	$3+\partial$	$6+4\partial$	$10+10\partial$ ...
1	$4+\partial$	$10+5\partial$	$20+15\partial$ ...
.	.	.	. ...

On a (II) pour $\partial=1$. $P=M+N$.

3. Or nous donnons la suivante plus générale représentation analytique, instructive et élegante, avec la loi $P=x.M+N$ indiquée $(n.1)$.

Posons

$$\Phi_m(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m$$

où x est une variable entière positive quelconque.

C'est:

$$\Phi_0(x)=1 \qquad \frac{\Phi_m^{(m)}(x)}{m!}=1 \quad (m!=1.2.3...(m-1).m)$$

Si α est un nombre entier positif quelconque, formons le carré:

α	α	α	α	α	...
$\alpha\Phi_0(x)$	$\alpha\Phi_1(x)$	$\alpha\Phi_2(x)$	$\alpha\Phi_3(x)$	$\alpha\Phi_4(x)$	...
$\alpha\Phi_1'(x)$	$\alpha\Phi_2'(x)$	$\alpha\Phi_3'(x)$	$\alpha\Phi_4'(x)$	$\alpha\Phi_5'(x)$	...
$\frac{\alpha\Phi_2''(x)}{2!}$	$\frac{\alpha\Phi_3''(x)}{2!}$	$\frac{\alpha\Phi_4''(x)}{2!}$	$\frac{\alpha\Phi_5''(x)}{2!}$	$\frac{\alpha\Phi_6''(x)}{2!}$	...
$\frac{\alpha\Phi_3'''(x)}{3!}$	$\frac{\alpha\Phi_4'''(x)}{3!}$	$\frac{\alpha\Phi_5'''(x)}{3!}$	$\frac{\alpha\Phi_6'''(x)}{3!}$	$\frac{\alpha\Phi_7'''(x)}{3!}$	...
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
$\frac{\alpha\Phi_m^{(m)}(x)}{m!}$	$\frac{\alpha\Phi_{m+1}^{m)}(x)}{m!}$	$\frac{\alpha\Phi_{m+2}^{(m)}(x)}{m!}$	$\frac{\alpha\Phi_{m+3}^{(m)}(x)}{m!}$	$\frac{\alpha\Phi_{m+4}^{(m)}(x)}{m!}$	...

C'est

[8]) Ecuaţia (68) putând fi adusă în general în trei moduri distincte la forma (69), cubica degenerată (68) admite în general trei conice directoare de forma (71) şi trei drepte (Δ) corespunzătoare de forma (72).

$$(\omega)\qquad \frac{\alpha\,\Phi_n^{(r)}(x)}{r!} = x\cdot\frac{\alpha\,\Phi_{n-1}^{(r)}(x)}{r!} + \frac{\alpha\,\Phi_{n-1}^{(r-1)}(x)}{(r-1)!}\cdot$$

Pour $\alpha = 1$, $x = 1$, on a (II).

4. Avec un deplacement indiqué $(n.1)$, dans le carré (i), nous obtenons le suivant triangle (où $A = B + x.C$)

$$\begin{array}{lccccc}
 & \alpha & & & & \\
 & \alpha & \alpha & & & \\
 & \alpha & \alpha\Phi_1(x) & \alpha & & \\
 & \alpha & \alpha\Phi_2'(x) & \alpha\Phi_2(x) & \alpha & \\
(j) & \alpha & \dfrac{\alpha\Phi_3''(x)}{3!} & \alpha\Phi_3'(x) & \alpha\Phi_3(x) & \alpha \\
 & \alpha & \dfrac{\alpha\Phi_4'''(x)}{3!} & \dfrac{\alpha\Phi_4''(x)}{2!} & \alpha\Phi_4'(x) & \alpha\Phi_4(x)\ \ \alpha \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \ \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \ \cdot
\end{array}$$

Pour $\alpha = 1$, $x = 1$ donne le célebre triangle de *Tartaglia*. (I).

Explicitement (i) et (j) on peut écrire:

$$\begin{array}{lcccc}
 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha\ .. \\
 & \alpha & (x+1)\alpha & (x^2+x+1)\alpha & (x^3+x^2+x+1)\alpha\ ... \\
(i) & \alpha & (2x+1)\alpha & (3x^2+2x+1)\alpha & (4x^3+3x^2+2x+1)\alpha\ ... \\
 & \alpha & (3x+1)\alpha & (6x^2+3x+1)\alpha & (10x^3+6x^2+3x+1)\alpha\ ... \\
 & \alpha & (4x+1)\alpha & (10x^2+4x+1)\alpha & (20x^3+10x^2+4x+1)\alpha\ ...
\end{array}$$

. . . . . .

$$\begin{array}{lcccc}
 & \alpha & & & \\
 & \alpha & \alpha & & \\
(j) & \alpha & (x+1)\ \alpha & \alpha & \\
 & \alpha & (2x+1)\alpha & (x^2+x+1)\ \alpha & \alpha\ \ \alpha \\
 & \alpha & (3x+1)\alpha & (3x^2+2x+1)\alpha & (x^3+x^2+x+1)\alpha\ \ \alpha
\end{array}$$

. . . . . .

On voit donc que non seulement le triangle (j) donne, pour $\alpha=1$ et $x=1$, le triangle de *Tartaglia* (I), mais de plus les coefficients des puissances semblables de x sont les nombres figurés des colonnes du carré (II).

VINCENZO G. CAVALLARO

EXAMEN DE ADMITERE LA POLITEHNICA DIN TIMIŞOARA

Facultatea de Construcţii

(10 — 14 Octombrie 1947).

GEOMETRIE.

Lucrarea scrisă.

I. Se consideră în raport cu două axe perpendiculare, Ox şi Oy un cerc tangent axei Ox în origină şi de rază a, iar pe Ox un punct $P(\alpha, 0)$, α fiind un parametru. Se cere: a) Coordonatele punctului Q de tangenţă al celei de a doua tangente ce se poate duce din B la cerc. b) Locul piciorului înălţimei coborîtă din P în triunghiul OPQ. Să se explice rezultatul geometric. c) Locul punctului de întâlnire a înălţimilor triunghiului O P Q. Să se explice rezultatul geometric.

II. Se consideră un triunghiu ABC ale cărui vârfuri au coordonatele. A $(0, a)$; B $(b, 0)$; C $(c, 0)$. Fie H punctul de întâlnire a înălţimilor, A′ piciorul înălţimei vârfului A şi A″ punctul unde această înălţime tae a doua oară cercul O circumscris triunghiului; fie deasemenea A_1 mijlocul lui B C şi A_2 diametralul opus lui A în cercul O. Se cere: a) Să se demonstreze ca $HA' = A'A''$ şi să se explice rezultatul geometric. b) Punctele H, A_1, A_2 sunt colineare şi să explice rezultatul geometric.

Oral. I. Se consideră trapezul isoscel A B C D în care $AB = a$ şi $CD = b$ sunt respectiv baza mică şi baza mare, iar înălţimea $AG = i$, (vârfurile A şi C sunt opuse). Din A spre B şi din C spre D se iau pe AB şi CD segmentele $AE = CF = x$. Se cere: a) Să se găsească minimul lungimii EF când x variază. b) Să se găsească distanţa lu B la EF când x este oarecare.

II. Să se construiască un triunghiu oarecare care are vârfurile B şi C fixe, unghiul A cunoscut şi ştiind că vârful A se găseşte pe un cerc dat. Discuţie.

III. Un triunghiu cu laturile constante este mobil în plan în aşa fel ca ortocentrul său (punctul de întâlnire a înălţimilor) să fie fix. Să se găsească locul vârfurilor triunghiului.

IV. Se dau două drepte nesituate în acelaş plan, (D) şi (D′) şi un punct M. Să se construiască o dreaptâ (Δ) care să treacă prin M şi să se sprijine pe dreptele date.

ALGEBRĂ

Lucrarea scrisă. I. Să se calculeze suma; $S = 1^3 + 5^3 + 9^3 + \ldots + (4n-3)^3$.

II. Să se extragă rădăcină patrată din polinomul $9a^2x^6 + 12abx^5 + 4b^2x^4 - 6a^3bx^3 - 4a^2b^2x^2 + a^4b^2$, ştiind că este pătrat perfect.

III. Să se calculeze

$$E = \lim_{x=0} \frac{arc\sin x - \sin x.\sqrt{1-x^2}}{x^3}\cdot$$

IV. Presupunând că α şi β sunt coordonatele unui punct din plan, să se separe planul în regiuni după natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$4x^5 - 15\alpha x^4 - 10\alpha^3 x^2 + 60\alpha^4 x + 39\alpha^3(\beta^2 - 1) = 0.$$

Oral. I. Să se scrie expresia:

$$\sqrt{a^2(a^2+1) - b^2(b^2-1) + 2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}} - \sqrt{a^2(a^2+1) - b^2(b^2-1) - 2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}}$$

sub forma cea mai simplă.

II. Să se arate că derivata funcţiunii $y = \sin 2x\,(5 - 2\cos^2 x) - 6x$ este de forma $a\sin^4 x + b\cos^4 x$ unde a şi b sunt constante. Să se calculeze aceste constante.

III. Să se găsească valorile reale care verifică sistemul

$$x+y-xy=5\ ,\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{19}{216}.$$

IV. Să se rezolve și discute ecuația:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8x}-\frac{169}{24(3x+8)}=\frac{1}{\alpha}$$

după diferitele valori ale parametrului α

TRIGONOMETRIE

Lucrarea scrisă. I. Să se arate că dacă

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}a,\ \text{atunci avem și}\ \cos\theta=\frac{\cos a-\alpha}{1-\alpha\cos a}$$

II. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia: $\sin A+\sin B-\sin C$, unde A, B și C sunt unghiurile unui triunghiu.

III. Să se rezolve un triunghiu ABC în care se cunoaște $A=94^0\,19'\,40''$, bisectoarea unghiului A, $ha=2109,75$ m și latura $c=1489,62$ m. Pentru aflarea elementelor a și b se vor indica și aranja calculele fără a se efectua.

IV. Cunoscând unghiul $\widehat{XVY}=155^0\,31'\,20''$ și segmentul $VB=4,55$ m luat pe bisectoarea VZ a unghiului XVY, să se calculeze: 1) raza cercului ce trece prin V și este tangent la XV și YV; 2) Valoarea segmentelor VT_1 și VT_2; 3) Lungimea arcului de cerc T_1BT_2.

Oral. I. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sin x\operatorname{tg}^2x}{\sec^2x}-\frac{2}{\operatorname{cosec}^2x}-\sin^2x+8\sin x=2+\sin x\cos^2x+\frac{4}{1-\operatorname{cotg}^2x}.$$

II. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$1+\sin x+\cos x.$$

III. Să se calculeze distanțele ortocentrului unui triunghiu la laturi în funcție de unghiuri și raza cercului circumscris.

IV. Punctul B, situat deasupra nivelului unui lac la înălțimea x, se vede din punctul de observație A sub unghiul de elevație $\alpha=18^0\,22'\,30''$ (unghiul dreptei AB cu orizontala și situat deasupra acesteia), iar imaginea punctului B, B′ sub unghiul de depresiune $\beta=47^0\,12'\,20''$ (unghiul dreptei AB′ cu orizontala). Punctul de observație A are înălțimea deasupra nivelului locului, $i=25,435$ m. Să se calculeze în metri cu aproximație de 3 zecimale, înălțimea x și distanța dintre punctul A și verticala BB′ (formula cu ajutorul căreia se face acest calcul să fie calculabilă prin logaritmi).

(fiecare probă a durat 3 ore).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, No. 3, Noembrie 1947. † Profesorul *Ioan Stamatescu*, de *N. N. Mihăileanu*. O problemă de construcție, de *Șerban Gheorghiu*. Raport pentru acordarea premiului „*V. Conta*" pe anul 1947, de Ing. *I. S. Antoniu*, Prof. *Petre Sergescu* și Prof. *Șerban Țițeica*. Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

2. *Buletinul Politehnicei „Gh. Asachi din Iași*, T. 2, 1947. Aritmetically monotore sequences by *A. Wintner*. The pattern for the distribution of the numbers c when the diophantine equation $ax+by=c$ has exactly n solutions, by *Herman T. R. Aude*. Applications du problème de prolongement d'un système associatif dénombrable, par *Octav Munteanu*. Sur une certaine deformation des congruences de courbure nulle, par *Adolf Haimovici*. Sur une certaine correspondance par plan tangents paralléles entre deux surfaces cerclées, par M-me *Stefania Ruscior*. Sur une famille de transformations entre deux surfaces réglées, par *I. Creangă*. Sur les espaces des familles simplement transitives de transformations de variables à courbure de 3-e espèce nulle, par *Mendel Haimovici*. Sur les courbes concurrentes dans géométrie centro-affine, par *Const. Borș*. Sur un théorème de géométrie elémentaire, par *Ilie Popa*. Note: Sur le définition du logarithme dans le domaine réel, par *Al. C. Climescu*. Recherches sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, par *D. I. Mangeron*. Sur une équation de récurrence triangulaire, par *Nicolas Negoescu*. Multikongruenz ebener Mengen und Pythagoreischer Lehrsatz, von *H. Hadwiger*. Sur trois homographies du plan de *Gaus*, par *R. Deaux*. Sur une certaine surface réglée à une surface périsphère, par *G. Ciobanu*. Sur les surfaces lieu de coniques, par *C. P. Bogdan*. Rapport entre la chaleur moléculaires de fusion et la température absolue de fusion des métaux monoatomiques et des composées chimiques, par *Stefan Procopiu*. La phototropie au point de vue de la mésométrie, par *C. V. Gheorghiu*. La longueur de l'entrefer dans un moteur d'induction polyphasé, par *Cezar Parteni Antoni* et *Vasile Corlățeanu*. Perturbations produites par le fonctionnement d'un groupe moteur asyncrone triphasé Compresseur à piston sur l'intensité du courant absorbé aux réseaux, par *Cezar Parteni Antoni*, *V. Corlățeanu* et *V. Hanganu*. Anomalies chez les plantes cultivées, par *Stefan Popescu*. Contribution à la chorologie de Loranthus Europaesus, par *Em. Popa*. Sur le régime intermittent des moteurs éléctriques, par *N Popinceanu*. Considération sur le meilleur rendement d'utilisation des ecrans fluorescents dans les rayons X, par *V. Petrescu* et *E. Luca*. Contribution à l'étude des chutes internes de tensions aux transformateurs dans le cas des radiographie instantanées à forte intensité, par *Emil Luca* et *Gh. Iliescu*. Influence du poids sur la traction par adhérence pour les vehicules routiers et ferroviaires, par *S. Oprișor*. Calcul des déformations élastiques des piéces pendant les cylindrages aux tours automatiques, en fonction des paramètres technologiques de l'usinage, par *Lucius N. Săveanu*. Sur la cause de la presence de sodium dans les eaux des océans d'approximativement trente fois plus que potassium, par *Haralambie Vasiliu*. Comptes rendus des livres reçus, par *Mihail Șt. Botez*, *Al. C. Climescu*, *Ion Creangă*, *D. I. Mangeron*, *G. Costeanu*.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1741. — *Pe laturile unui triunghiu* ABC, *considerate ca diametre se construiesc trei cercuri. Să se arate că între lungimile tangentelor comune, considerate între punctele de contact ale acestor cercuri, există relațiile*

$$1^0.\qquad \Sigma T_a^2=r(4R+r)=rp\,\Sigma\operatorname{tg}\frac{1}{2}A.$$

2^0. $T_a T_b T_c = Sr = \frac{1}{2} r b c \sin A = \frac{1}{2} r a c \sin B = \frac{1}{2} r a b \sin C$.

I. I STAMATE

Soluția. Dacă notăm cu d distanța dintre centrele a două cercuri de rază R și r, lungimea tangentei exterioare este dată de formula

$$t^2 = d^2 - (R-r)^2.$$

În cazul nostru vom avea

$$T_a^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4}(c-b)^2 = (p-b)(p-c), \ldots$$

Dar se cunosc formulele

$$(p-b)(p-c) = r r_a, \quad r_a = p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A, \quad \Sigma r_a = 4R + r,$$

încât prima relație din enunț este imediată

$$\Sigma T_a^2 = \Sigma r r_a = r \Sigma r_a = r(4R + r) = r p \Sigma \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A.$$

Pentru a doua relație avem

$$T_a T_b T_c = (p-a)(p-b)(p-c) =$$
$$S^2/p = Spr/p = Sr = \tfrac{1}{2} r b \sin A = \cdots$$

în baza unei formule clasice a suprafeței.

Au rezolvat problema D-nii: *Aldea V. Mircea, Bakonyi C., Cristea I. N., Dăscălescu Șt. Hr., Enăchescu Gr. I., Gligor N. I., Lupescu Cor., Modâlcă S. Em., Stanciu A. P., Tica P. Marin-Gall, Tilică C. Șt., Tincu C. C., Venter D.* și *Wegener Eug.*

Notă. În R. M. T., vol. 24 p. 46 s'au dat de către autorul problemei, 20 relații între segmentele T_a, T_b, T_c.

Gh. Th. Gh.

Problema 1784. — *Să se găsească un număr întreg* N *al cărui patrat se obține scriind pe* $N \pm 1$ *între cifrele a și b.*

G-L. GH. BUICLIU

Soluția. I. Considerăm cazul

$$(1) \qquad N^2 = a(N+1)b,$$

unde $a(N+1)b$ înseamnă numerele a, $N+1$, b, scrise unul după altul. Fie n numărul cifrelor lui N, atunci N^2 are $2n$ sau $2n-1$ cifre, iar $N+1$ are n sau $n+1$ cifre. Vom examina pe rând fiecare caz în parte.

1^0. N^2 are $2n$ cifre, iar $N+1$ are n cifre. Întrucât a și b sunt cifre, rezultă după (1) că N^2 va trebui să aibă $n+2$ cifre și cum N^2 are prin ipoteză $2n$ cifre, urmează că

$$2n = n+2 \quad \therefore \quad n = 2 \quad \text{și} \quad N < 99,$$

căci am presupus că $N+1$ are tot n cifre. Acestea fiind stabilite, urmează că în cazul 1^0, egalitatea (1) se scrie

$$N^2 = a \times 100 + 10N + 10 + b$$

$$\therefore \quad (2) \quad N = 5 \pm \sqrt{35 + 1000a + b}.$$

Pentru ca N să fie număr întreg și pozitiv (căci altfel (1) nu are senz), trebue ca $P = 35 + 1000a + b$ din (2) să fie pătrat perfect, iar pentru semnul — un pătrat perfect mai mic decât 25. Observăm că b fiind terminație de patrat, nu poate avea decât valorile 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

Dăm deci lui b în (2) pe rând aceste valori.

Pentru $b = 0$, avem: $P = 35 + 1000a$, care nu poate fi pătrat perfect căci 35 nu este terminație de pătrat perfect.

Pentru $b = 1$, găsim

$$P = 36 + 1000a = x^2,$$

$$\therefore \quad 1000a = (x-6)(x+6) = 8 \times 125 \times a.$$

Se observă că dacă $x-6$ se divide cu 5, atunci

$$x + 6 = x - 6 + 6 + 6 = x - 6 + 12$$

nu se divide cu 5 și de oarece $125 = 5^3$, urmează că avem: $x-6 = 125m$ sau $x+6 = 125p$ și atunci

$$8 \times 125a = 125m(125m+6) \text{ sau} = (125p-6)125p,$$

$$\therefore \quad (3) \quad 8 \times a = m(125m+6) \text{ sau } = p(125p-6).$$

Dar a este număr de o cifră deci cel mult 9 și deci $8 \times a \leq 72$. Ori se vede din (3) că pentru m sau $p = 1$, cele mai mici valori ale lui m sau p, membrul al doilea este mai mare ca $+2$. Deci (3) nu poate avea loc de cât pentru: $a = m = p = 0$ și atunci: $P = 36 = 6^2$, iar $N = 5 \pm 6$, valori din care numai $N = 11$ are senz și ne dă soluția

$$\boxed{11^2 = 121 = 0(11+1)1},$$

care însă *nu răspunde* cazului 1^0 căci 11^2 nu are 4 cifre.

Dând lui b în (2) celelalte valori găsim că numai pentru $b = 6$ sau $b = 9$, numărul P are terminație de pătrat perfect. Pentru $b = 6$ sau 9, avem

$$P = 41 + 1000a \quad \text{sau} \quad P = 44 + 1000a.$$

Trebue să avem

$$41 + 1000 = x^2, \quad \therefore \quad 40(1 + 25a) = (x-1)(x+1,$$

$x-1$, $x+1$ diferind cu 2 sunt de aceiași paritate

şi cum produsul $(x-1)(x+1)$ trebue să se dividă prin 8, unul cel puţin din numerele $(x-1)$ şi $(x+1)$ se divide prin 4. Fie: $x-1=4m$, atunci

$$8\times 5\times(1+25a)=4m(4m+2)=8m(m+1),$$

$$\therefore \quad 5(1+25a)=m(m+1).$$

Membrul al doilea fiind pereche trebue ca a să fie *nepereche*. Se găseşte la fel din $44+1000a=y^2$, că a trebue să fie nepereche, deci una din cifrele

1, 3, 5, 7 sau 9.

Ducând pe rând aceste valori în (2), unde se face pe rând $b=6$ şi $b=9$, nu găsim decât soluţia

$$N=5+\sqrt{35+5000+6}=5+71=76,$$

$$N^2=76^2=5(77)6=5(76+1)6.$$

2°. N^2 are $2n$ cifre, iar $N+1$ are $n+1$ cifre. Se găseşte ca la 1° că $n=3$.

Pe de altă parte dacă N are n cifre şi $N+1$ are $n+1$ cifre, trebue să avem neapărat: $N=99\ldots9_n$. iar $N=999 \quad \therefore \quad 999^2=9.9800.1$ nu este soluţie.

3°. N^2 are $2n-1$ cifre, iar $N+1$ are n cifre. Ca la 1°, trebue să avem

$$2n-1=n+2 \quad \therefore \quad n=3,$$

deci

$$N^2=a\times 1000+10N+10+b,$$

$$N=5\pm\sqrt{35+b+1000a}.$$

Se găseşte ca la 1° că b trebue să fie 1, 6 sau 9 şi deci trebue căutate numerele de 5 cifre

$a0036$, $a0041$ şi $a0044$.

Dând lui a diferite valori, se găseşte că *numai* $a=0$ dă pătratul, format de 5 cifre: $00036=6^2$ şi deci soluţia de formă

$$N^2=(011)^2=00121=0(010+1)1.$$

4°. N^2 are $2n-1$ cifre, iar $N+1$ are $n+1$ cifre, Găsim $n=4$ şi $N=9999$, care nu este soluţie căci

$$9999^2=99980001.$$

II. Să examinăm cazul

$$N^2=a(N-1)b. \tag{3}$$

Considerăm ca la I diferitele sub cazuri.

α^0. N^2 are $2n$ cifre şi $N-1$ are n cifre. Deci trebue ca

$$2n=1+n+1 \quad \therefore \quad n=2$$

şi ecuaţia problemei este

$$N^2=10000a+10N-10+b,$$

$$\therefore \quad N=5\pm\sqrt{15+b+1000a}.$$

Din valorile pe care le poate avea b, numai 1, 6 şi 9 ne dă terminaţii de pătrate şi suntem conduşi a căuta valorile lui a pentru care numerele de 4 cifre $a016$, $a021$ sau $a024$ sunt pătrate perfecte. Găsim că numai 0016 şi 1024 sunt pătrate. Primul dă soluţia de formă

$$(09)^2=0081=0(09-1)1$$

şi al doilea soluţia efectivă

$$\boxed{37^2=1369=1(37-1)9}.$$

β^0. N^2 are $2n$, iar $N-1$ are $n-1$ cifre. Avem

$$2n=1+n-1+1 \quad \therefore \quad n=1$$

şi fiindcă $N-1$ are $n-1$ cifre urmează că

$$N-1=100\ldots0 \quad \therefore \quad N=100\ldots1$$

şi fiind-că N are n cifre, avem soluţia de formă

$$N=1 \quad \text{cu} \quad N^2=01=0(0-1)1.$$

γ^0. N^2 are $2n-1$ şi $N-1$ are n cifre, atunci

$$2n-1=1+n+1 \quad \therefore \quad n=3$$

şi ecuaţia problemei este

$$N^2=a\times 1000+10N-10+b,$$

$$\therefore \quad N=5\pm\sqrt{15+b+10000a}$$

şi problema revine la a căuta pătratele de 5 cifre de forma

$a0016$. $a0021$ sau $a0024$.

Se găseşte că în afară de forma banală *00016* nici unul din numerele precedente nu sunt pătrate perfecte. Deci nici în cazul γ^0 nu avem soluţie.

δ^0. N^2 are $2n-1$ cifre, iar $N-1$ are $n-1$ cifre. Rezultă $n=2$ şi $N-1=10-1=9$. Dar 10^2 nu este de forma $a(N-1)b$.

Deci nu avem soluţie.

În concluzie, am găsit că problema are următoarele soluţii

$$011^2=0(012)1; \quad 76^2=5(77)6 \quad \text{şi} \quad 37^2=1369.$$

După cum se vede problema este foarte simplă şi elementară, totuşi ea nu a fost atacată de cât de 4 cores-

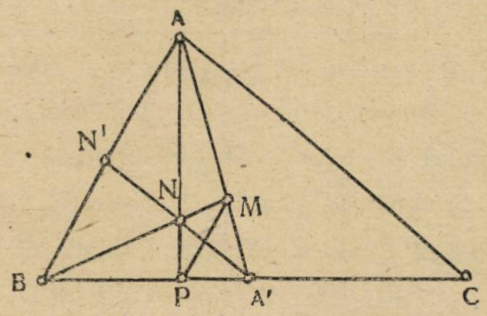
pondenți și acestia s-au pus, *fără nici o justificare*, în ipoteza că N are 2 cifre găsind soluțiile 76 și 37. Pe această cale, nejustificat restrictivă, au dat soluțiile d-nii: *Godea Ioan*, *Tilică C. Șt.* și *Venter D-tru*, iar d-l *Jidanu I. C.* a dat numai soluția 76.

G-l Gh. Buicliu

Problema 2247. — *Prin vârful* B *al triunghiului* A B C *se duce o dreaptă, care întâlnește în* M *mediana* A A'. *Paralela din* M *la* A B *taie pe* B C *în P, iar* A P *taie pe* B M *în* N. *Să se arate că* A' N *este paralelă cu* A C.

G-l Gh. Buicliu

Soluția I. Prelungim pe A'N până întâlnește în N' latura AB. Figura A M P B fiind un trapez cu laturile M P, A B paralele, punctul N' este mij-



locul lui A B, cum A' este prin construcție mijlocul lui B C urmează că A' N' este paralelă cu AC.

Această soluție a fost dată de d-nii: *Tincu C. C.* (Lic. „Diaconovici Loga" Timișoara) și *Grigore A. Gh.*

Soluția II. Triunghiurile asemeni MPN și ANB dau

$$(1)\qquad \frac{NP}{NA}=\frac{MP}{AB}=\frac{NM}{BN}$$

La fel din $MA'P \sim AA'B$ se scoate

$$(2)\qquad \frac{A'P}{A'B}=\frac{MP}{AB}=\frac{A'M}{A'A}$$

Din (1) și (2) se deduce

$$(3)\qquad \frac{NP}{NA}=\frac{A'P}{A'B}=\frac{A'P}{A'C}$$

căci A' este mijlocul lui B C. Relația (3) arată că A'N este paralelă cu A C.

Au dat această soluție D-nii: *Bagiu N. I*, *Gotthard Fr.* (P., T.), *Barbu A. I.* (Lic. Caracal), *Birănaș T. I.* (Arad), *Bogza M.* (Lic. Deva), *Constantinescu N. Ilie* (Lic. Brăila), *Dobrotescu M. Gh.* (Lic. Caracal), *Gligor N. Ion* (student Timișoara), *Grigore A. Gh.* (Particular), *Mahrenholz J.* (Kotbus), *Stanciu A. Petre* (Timișoara), *Corduneanu C.* (Col. „Nic. Filipescu" Predeal), *Crăciunescu Victor* (Timișoara), *Mazilu M.* (Bacalaureat, Făgăraș), *Popa V. Const.* (Oradea).

Au trimis soluții prin geometria analitică D-nii *Brasch M. Andrei*, *Miclea Nic.* (P. T.), *Novac I. I.* (Lic. Brăila), *Popa D. Vasile* (Bacalaureat), *Stănilă D. George* (Buzău), și *Wegener Eugen* (București).

Problema 2353. — *Să se demonstreze că* 93636 *este singurul pătrat perfect de forma* 9 36 36 ... 36.

G-l Gh Buicliu

Soluție. Avem

$N = 93636\ldots36 = 36\times 26101\ldots0101.$

Pentru ca N să fie patrat perfect trebue ca factorul al doilea să fie patrat perfect. Insă numerele terminate în 101 nu sunt patrate perfecte[1]) Deci în factorul al doilea trebuie să dispară cifrele 1010.. 01 și rămâne 2601 care este patratul lui 51 așa că

$$N = 36\times 51^2 = 93636.$$

A dat această soluție d-l *Ion I. Sasa* (P., T.).

D-l *E. N. Wegener* (P., B) a dat o soluție analoagă punând pe N sub forma

$$N = 9\left[10^{2n}+4\cdot 10^{2n-2}+\cdots 4\cdot 10^2+4\right]$$

și demonstrând că paranteza nu este patrat perfect de cât pentru $n=2$.

Celelalte soluții primite sunt lipsite de rigoare.

Problema 2371. — *In triunghiul dreptunghic* A B C (A = 90°) *fie* O *mijlocul lui* B C, M *mijlocul lui* A C, D *piciorul perpendicularei din* A *pe* B C, N *piciorul perpendicularei din* D *pe* A B.

1°. *Se cere să se verifice relațiile:*

a) $2(\overline{AO}^2+\overline{OC}^2)=\overline{BC}^2$

b) $\overline{AD}^4-\overline{ND}^4=\overline{BN}(\overline{DC}^2\cdot\overline{AB}-\overline{AN}^2\cdot\overline{BN})$

c) $\overline{AD}^4-\overline{ND}^4=\overline{AN}^3(\overline{AB}+\overline{BN})$.

2°. *Dându-se* $\overline{AB}=a\sqrt{2}$, $\overline{BN}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ *se cere să se afle suprafața figurii la care se reduce poligonul* A N D O M. *Să se verifice că suprafața obținută este jumătate din suprafața triunghiului* ABC *dat.*

Al. I. Tigăniu

Soluție. 1°. O este și centrul cercului circumscris deci $\overline{OA}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ Relațiile metrice cunoscute

---

[1]) *I. Ionescu.* Culegere de probleme de aritmetică.

în triunghiurile dreptunghice formate permit să scriem

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}.\overline{DC} = \overline{AB}.\overline{AN}, \quad \overline{ND}^2 = \overline{AN}.\overline{NB}$$

$$\overline{AD}^4 = \overline{BD}^2.\overline{DC}^2 = \overline{BA}.\overline{BN}.\overline{DC}^2$$

ceeace conduce la relaţia b); avem de asemenea

$$\overline{AD}^4 - \overline{ND}^4 = (\overline{AD}^2 - \overline{ND}^2)(\overline{AD}^2 + \overline{ND}^2) =$$

$$\overline{AN}^2(\overline{AB}.\overline{AN} + \overline{AN}.\overline{NB}) = \overline{AN}^3(\overline{AB} + \overline{BN}).$$

2°. Să căutăm condiţia ca aria ANDOM să fie jumătate din aria S a triunghiului; va trebui ca suma ariilor BND şi COM să fie jumătate din aria S; dar aria COM este un sfert din S; va trebui ca şi aria BND să fie un sfert din S adică $\overline{BN}$ să fie jumătate din $\overline{AB}$ ceeace are loc în cazul particular din enunţ.

Au rezolvat problema, d-rele: *Rodica Diea* şi *Alexandrina Costin* şi d-nii: *M. Bălăuţă, I. Birânaş, M. Bogza, A. Brasch, C. Chiriac, L. Coman, I. N. Constantinescu, Coţiu Aurel, E. Danilescu, Em. Deutsch, A. Dobrişan, I. Enache, R. Frunză, M. Giurconiu, I. Gligor, G. Goldiş, G. Grigore, R. Haret, B. Horoviţ, G. Manolescu J. Man, A. Mitric, I. Novac, M. Opreanu, D. Palade, S. Pali, Al. Pantea, V. D. Popa, D. Popescu, C. Roman, I. Sasu, I R. Şchiopu, M. Şerengău, T. Stern, F. Stroescu, P. Teodorescu, C. Tincu, I. Titero, I. Tripşa, G. Vrânceanu.*

Au dat soluţii analitice, d nii: *R. Beşchea, E. Macavei* şi *A. Rohrlich.*

N. N. M.

Problema 2519. — *Să se stabilească identitatea*

$$2^4 \sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1.$$

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţia. Avem succesiv

$$2^2 . 2\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\cdot 2\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} =$$

$$= 4\left(\cos\frac{1}{4}\pi - \cos\frac{1}{3}\pi\right)\left(\cos\frac{1}{4}\pi - \cos\frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{1}{4}\pi - \cos\frac{1}{3}\pi\right)\left(\cos\frac{1}{4}\pi + \cos\frac{1}{3}\pi\right) =$$

$$= 4\left(\cos^2\frac{1}{4}\pi - \cos^2\frac{1}{3}\pi\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1.$$

Au rezolvat problema D-nii: *Cioară Gh. A.* (Beiuş), *Ciucescu P.* (Slatina), *Cocoş Gh* (Timişoara), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Coţiu A.* (Cluj), *Dăscălescu Hr.* (R. Sărat), *De Sabota Ion* (Beiuş), *Deutsch Em.* (Timişoara), *Georgian N. N.* (Predeal), *Gherlan I. V.* (Beiuş), *Giurconiu M.* (Timişoara), *Hurezeanu R.* (Tg. Jiu), *Man Iosif* (Timişoara), *Mărcuţiu P. S.* (Timişoara), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Munteanu G.* (Braşov), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Novacl. I.* (Timişoara), *Pantea N. A.* (Beiuş), *Păunescu Şt. Gh.* (Lic. M. Basarab, Bucureşti), *Pisanca N. I.* (Col. Loga, Timişoara), *Popa Pavel* (Lic. Gojdu, Oradea), *Popescu A.* (Tg.-Jiu), *Ristea Gh. Gh.* (Bucureşti), *Ioncu Simion* (Timişoara), *Stancu D. D.* (Arad), *Tarcea I.* (Timişoara), *Teleagă D.* (Timişoara), *Teodorescu P. P.* Bucureşti), *Toderaşc I. V.* (Timişoara) şi *Zelingher N.* (Timişoara).

Gh Th Gh.

Problema 2522. — *În anul 1946 un intelectual fiind întrebat în ce an s'a născut, răspunde: vârsta mea este egală numărul format din ultimele două cifre ale anului ce reprezintă contingentul meu, iar dublul vârstei mele este suma cifrelor anului contingent multiplicată cu patru. Se cer: anul naşterii, vârsta, contingentul·*

MAIOR G. P. BOERESCU

Soluţia. Anul contingentului este de forma $19ab$ sau $18ab$. Să examinăm primul caz. Vârsta fiind $10 + ab$ ecuaţia problemei este

$$4(1 + 9 + a + b) = 2(10a + b); \quad a = \frac{1}{8}(20 + b).$$

Cum numerele a şi b sunt întregi şi de o singură cifră, această ecuaţie spune că trebue să luăm $b=4$, $a=3$. Deci contingentul este 1934, vârsta 34 ani iar anul naşterei 1912.

Luând cazul $18ab$ nu obţinem soluţie nouă deoarece nu se poate ca cel născut 1910 să fie contingentul 1836.

Soluţii date de d-nii: *Cârciu I.* (Timişoara), *Cioara Alex.* (Beiuş), *Ciucescu Paul* (Slatina), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Coţiu A.* (Cluj), *Dăscălescu Hr.* (R.-Sărat), *Gherlan I. V.* (Beiuş). *Giurconiu M.* (Timşioara), *Man Iosif* (Timişoara), *Man Oct.* (Cluj), *Marinescu D. S.* (Ploeşti), *Munteanu Giuseppe* (Braşov), *Neguţ A I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (Timişoara), *Pantea Nic. Alex.* (Beiuş), *Păsăriu Gr. Gh.* (Tg.-Jiu), *Păunescu Şt. Gh.* (Bucureşti), *Popa Pavel* (Oradea). *Popescu Sandu* (Tg.-Jiu). *Râmboiu N. Sept.* (Cluj), *Stancu D. D.* (Arad), *Stănescu D. C.* (Reşiţa) şi *Teodorescu T. P.* (Bucureşti).

Gh. Th. Gh.

Problema 2535. — *Să se arate că în triunghiul în care*

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}B + C\right) - \sin C\cos\tfrac{1}{2}B = 1,$$

avem relaţia

$$\frac{\sin 2C}{4c} = \frac{\cos\frac{1}{2}B}{b}.$$

H I. TEIUSAN

Soluţia. Dezvoltând pe $\sin\left(\frac{1}{2}B + C\right)$, prima relaţie se scrie mai simplu

$$\sin\tfrac{1}{2}B\cos C = 1. \tag{1}$$

Cum într'un triunghiu, $b = 2R\sin B, \ldots$, relaţia a doua se mai scrie

$$\frac{2\sin C\cos C}{8R\sin C}=\frac{\cos\frac{1}{2}B}{2R\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B},$$

unde, după ce facem toate simplificările, ajungem la relaţia (1).

Observare. Reciproc, dacă într'un triunghiu avem relaţia a doua din enunţ, atunci avem şi pe prima.

Soluţii date de d-nii: *Bâlă V. C.* (Cordeşti, Gorj), *Barbul V. V.* (Oradea), *Cioara Gh. Alex.* (Beiuş), *Ciucescu Paul* (Slatina), *Coţiu A.* (Cluj), *Dăscălescu Hr.* (R. Sărat), *De Sabota I.* (Beiuş), *Deutsch Em.* (Timişoara), *Gertler N. R.* (Bucureşti), *Gherlan I. V.* (Beiuş), *Giurconiu M.* (Timişoara), *Hurezeanu R.* (Tg.-Jiu), *Iovănel Ch.* (Timişoara), *Marinescn S. D.* (Ploeşti), *Munteanu G.* (Braşov), *Neguţ A. I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (Timişoara), *Pantea N. Alex.* (Beiuş), *Râmboiu N. Sept.* (Cluj), *Ristea Gh. Gh.* (Bucureşti), *Stancu D. D.* (Arad), *Stănilă D. G.* (Buzău), *Teodorescu P. P.* (Bucureşti) şi *Toderaşc I. V.* (Timişoara).

Gh. Th. Gh

PROBLEME PROPUSE

2571. — Să se calculeze suma,

$$1^3+5^3+\cdots+(4n-3)^3.$$

GH. TH. GHEORGHIU

2572. — Să se construiască triunghiul isoscel cu laturile AB, AC egale, ştiind că BC trece printr'un punct O, vârful C se află pe o dreaptă ce trece prin O, prin care trece şi latura BC şi că vârful B se află pe cercul cu centrul în O şi cu raza OA.

G-L GH. BUICLIU

2573. — Fie M şi N punctele unde o tangentă variabilă la un cerc dat de diametru AB taie tangentele în A şi B, iar D o dreaptă fixă ce trece prin A. Fie Q punctul de intersecţie a dreptei D cu BM. Să se arate, că locul geometric al intersecţiei perpendicularei ridicate în Q pe AB, cu MN, este o tangentă la cercul dat. Dacă punctele M şi N se află la intersecţiile tangentelor în A şi B respectiv cu dreptele AP şi BQ, P fiind punctul pe cerc, locul punctului Q este o tangentă la elipsa pe care o înfăşoară dreapta MN.

MARIA NEUMANN

2574. — Să se discute şi să se rezolve în cazurile de compatibilitate sistemul de ecuaţii,

$$\begin{cases} y=ax+b \\ z=ay+b \\ x=az+b, \end{cases}$$

a şi b fiind nişte parametri reali.

EUGEN VISA

2575. — Să se arate că funcţiile,

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x^3+3}{3x^2-1},$$

$$z=\frac{1}{2i}\log\frac{1+i+x^2(1-i)}{1-i+x^2(1+i)},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

au aceiaşi derivată.

Să se arate apoi că ecuaţia,

$$y'=\frac{1}{ax^2-x-a},$$

are două rădăcini independente de a şi să se studieze natura şi semnul celorlalte rădăcini, când variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

OVIDIU COSTIN

2576. — Să se arate că oricare ar fi a, b, c, avem,

$$\Sigma(1\pm\sin 2a)(\cos b\mp\sin b)(\cos c\mp\sin c)\sin(b-c)$$
$$=4\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a).$$

LT. C. D. IONESCU-ŢIU

2577. — Să se stabilească relaţiile,

$$sp\frac{A}{2}=\frac{sp\,A\sin A}{sp\,A+\sin A},\qquad 0\leq A\leq 90^0;$$

$$cp\frac{B}{2}=\frac{cp\,B\sin B}{cp\,B+\cos B},\qquad 90^0\leq B\leq 180^0$$

În particular să se verifice pentru extremităţile intervalelor.

V. ALAGI

2578. — Înălţimea unei stele este respectiv h_1, h_2, h_3, când astrul are unghiul la pol $=90^0$, se află în direcţia E şi direcţia S.

Să se demonstreze că latitudinea observatorului este dată dată de formulele

a) $$\frac{1}{sp\,\varphi}=\frac{1}{cp\,h_3}-\frac{1}{\cos h_3\operatorname{cosec} h_2};$$

b) $$\sin\varphi=\sqrt{\sin h_1\operatorname{cosec} h_2};$$

c) $$\cos^2\varphi\sin h_3+\cos\varphi\cos h_3=\sin h_3-\sin h_1.$$

LT. C-DOR C. V. COSTACHESCU

TABLOU

de candidaţii reuşiţi la examenul de admitere din 10 — 14 Octomvrie 1947.

FACULTATEA DE CONSTRUCŢIE
POLITEHNICA TIMIŞOARA

1. **Iancu D. Nic. Stelian** Lic. Brediceanu, Lugoj.
2. **Modorcea C. T. Octavian** Lic. Sf. Vasile, Blaj.
3. **Simonca E. Emil** Lic. Bariţiu, Cluj.
4. **Alexa Magdalena** Lic. Reg. Maria, Cluj.
5. **Tertea Igor** Lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
6. **Zuiac Mihai** Lic. Industrial, Reşiţa.
7. **Farcaş Eva** Lic. Oltea Doamna, Oradea.
8. **Idiţoiu Ilie** Lic. Industrial, Braşov.
9. **Stoica V. Valentin** Lic. Bariţiu, Cluj.
10. **Grozescu A. Coriolan** Lic. E. Gojdu, Oradea.
11. **Vicol D. Alexandru** Lic. Meşotă, Braşov.
12. **Roşu Tr. Daniel** Lic. Brediceanu, Lugoj.
13. **Bănulescu Gh. Ioan** Lic. Industrial, Braşov.
14. **Simionovici Gh. Toma** Lic. Ferdinand, Bacău.
15. **Sorbun T. Aurelian** Lic. Loga, Timişoara.
16. **Pricop Gh. Ioan** Lic. Sf. Vasile, Blaj.
17. **Socolov Al. Valentin** Lic. Industrial, Arad.
18. **Alster S. Rudolf** Lic. Prinţ Eugen, Timişoara.
19. **Soriţeu I. Cornel** Lic. M. Nicoară, Arad.
20. **Raţiu C. Maria** Lic. Carmen Sylva, Timişoara.
21. **Filimon P. Ioan** Lic. Mihai Viteazul, Alba-Iulia.
22. **Zaharia C. Vasile** Lic. Teoretic, Dorohoi.
23. **Spell E. Emil Helmuth** Lic. Honterus, Braşov.
24. **Deutsch G. Emeric S. A.** Lic. Izraelit, Timişoara.
25. **Păcuraru S. Teodor** Lic. Industrial, Braşov.
26. **Mihai P. Ioan** Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
27. **Silistraru T. Adrian** Lic. Tr. Doda, Caransebeş.
28. **Baron S. Erich** Lic. Gojdu, Oradea.
29. **Szelyes I. Francisc** Lic. Huniadi, Bistriţa.
30. **Sârbu C. Mihai** Lic. Construcţii, Timişoara.
31. **Bota I. Valentn** Lic. Avram Iancu, Brad.
32. **Sarlea I. Vasile** Lic. Bariţiu, Cluj.
33. **Radu I. Ioan** Lic. Industrial, Braşov.
34. **Pintilie C. Emil Sorin** Lic. Ferdinand I, Bacău.
35. **Tologea Gh. Sebastian** Liceul Militar, Craiova.
36. **Boţu N. Vasile** Lic. Construcţii, Câmpulung.
37. **Pretorian P. Mircea** Lic. Moise Nicoară, Arad.
38. **Goreţchi F. Alexandru** Liceul Nr. 2, Cernăuţi.
39. **Gârlişteanu M. Mircea** Liceul Loga, Timişoara.
40. **Zey E. Ernest Rudolf** Liceul Brukenthal, Sibiu.
41. **Antache N. Gheorghe** Liceul Militar, Craiova.
42. **Frunză C. Grigore** Lic. Loga, Timişoara.
43. **Tornghibel T. Laurenţiu** Liceul Gane, Fălticeni.
44. **Făinaru A. Harry** Liceul Izraelit, Galaţi.
45. **Cleps L. Temistocle** Liceul Traian, Turnu Severin.
46. **Savramis D. Ionel** Liceul Bălcescu, Brăila.
47. **Teodorescu I. Horaţiu** Liceul Bălcescu, Brăila.
48. **Waldmann L. Marcel** Liceul Evreesc, Galaţi.
49. **Pal E. Iosif Eugen** Licel R. Catolic, Braşov.
50. **Nan Gh. Ion** Liceul Industrial, Braşov.
51. **Duţescu N. Nicolae** Liceul Industrial, Braşov.
52. **Nicolae A. Chiril** Liceul Industrial, Braşov.
53. **Potoceanu N. Petru** Liceul Industrial, Reşiţa.
54. **Ristea Gh. Traian** Liceul Industrial, Câmpina.
55. **Roşu M. Petru** Liceul Industrial, Arad.
56. **Pop P. Ioan** Liceul Traian, Turnu-Severin.
57. **Stan Manolache** Liceul Industrial, Buzău.
58. **Mârşu I. Ovidiu Romul** Liceul Decebal, Deva.
59. **Crişciu I. Ioan** Liceul Brediceanu, Lugoj.
60. **Herbei Gh. Mircea** Liceul Avram Iancu, Brad.
61. **Bassa I. Mircea Emil** Col. Naţional, Craiova.
62. **Barla D. Eugen** Liceul Unitarian, Cluj.
63. **Popescu N. Aurel** Liceul Construcţii, Timişoara.
64. **Runcan M. Pavel** Liceul Andrei Şaguna, Braşov.
65. **Paşcovici S. Leonte** Liceul Brediceanu, Lugoj.
66. **Lazăr Gr. Cornel** Liceul Industrial, Braşov.
67. **Ciobanu Gh. Nicolae** Liceul Carol I., Craiova.
68. **Boleanţu I. Lazăr** Liceul Loga, Timişoara.
69. **Horodinschi I. Otto** Liceul Doda, Caransebeş,
70. **Munteanu G. Gligor** Liceul T. Maiorescu, Aiud.
71. **Ştefan Tit Liviu** Liceul Mihai Viteazul, Alba-Iulia.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bâlă V. Const. (P., 2492, 2508, 2512, 2532, 2554, 2555, 2564, 2565, 2566); *Cândea Victor* (2469, 2477, 2486, 2499, 2508, 2509, 2531, 2535, 2553); *Chiorean V. Ion* (2508, 2519, 2523, 2531, 2535); *Cioară Alex.* (P., 2537, 2538, 2543, 2546, 2549, 2550, 2553, 2555, 2565); *Constantinescu G. V.* (2453, 2460, 2475, 2476, 2492, 2512, 2531, 2535); *Coşniţă C.* (A., P); *Dăscălescu Hr.* (2129, 2501, 2505, 2523, 2549, 2550); *Deutsch Em.* (1789, 1894, 2261, 2270, 2436, 2438, 2451, 2453, 2468, 2469, 2477, 2483, 2508, 2509, 2523, 2532, 2549, 2555, 2565); *Gârlişteanu El.* (2496, 2497; 2512, 2522, 2555, 2565); *Georgescu Nicolin* (P., 2183, 2189, 2233, 2234, 2271, 2278, 2314, 2452, 2469, 2512, 2522, 2552); *Gherlan V.* (P., 2486, 2529, 2532, 2533, 2539, 2543, 2544, 2546, 2548, 2549, 2550, 2552, 2553, 2555, 2564, 2565, 2566); *Gongu Th.* (2508, 2513, 2523, 2535, 2553, 2566); *Hurezeanu R.* (N., 1902, 2427, 2499, 2552, 2553, 2565), *Man Ion* (P., 2535, 2537, 2550, 2552, 2555); *Man Oct.* (2564, 2565, 2566); *Mihăilescu D.* (2552); *Morega V. Tit.* (2496, 2504, 2512, 2516, 2522, 2530, 2538); *Munteanu Giuseppe* (P., 2477, 2478, 2537, 2546, 2551, 2555), *Neguţ A. Ion* (P., 2307, 2394, 2394, 2396, 2555, 2564, 2565); *Nemoianu C.* (2508, 2509, 2531, 2535, 2544, 2565, 2566, 2558); *Neumann M.* (A.), *Novac I. I.* (N.); *Păsărin Gh.* (2496, 2523, 2537, 2538, 2566); *Pisanca N. I.* (P., 1922. 2394, 2436, 2470, 2487, 2491, 2491, 2497, 2514, 2535, 2537, 2554), *Popa Pavel* (2505, 2508, 2509, 2535, 2554), *Purcea M. I.* (1949, 1953, 1954, 2271, 2416, 2442, 2452, 2466, 2469, 2493, 2499, 2506, 2508, 2510, 2512, 2513, 2514, 2519, 2530, 2531, 2535, 2548, 2552, 2553, 2565, 2566); *Raţiu M.* (2493, 2518, 2524, 2535, 2552, 2553); *Schlomik N.* (2562); *Stanciu D. D.* (P., 2276, 2329, 2387, 2458, 2466, 2472, 2473, 2508, 2513, 2537, 2565); *Szekely G.* (2118, 2362, 2438, 2447, 2469, 2509, 2549, 2550, 2554, 2560, 2565); *Tămăşescu D. V.* (1377, 1385, 1842, 2276, 2497, 2512, 2515); *Teodorescu P. P.* (N., P., 2483, 2502, 2510, 2515, 2516, 2518, 2521, 2524, 2525, 2533, 2534, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2253, 2554); *Toderaşc I. V.* (P., 2509, 2512, 2513, 2537, 2538, 2543); *Zbârcea I. I* (2508, 2513, 2523, 2533, 2566); *Zelingher N.* (P., 2501, 2508, 2509, 2512, 2513, 2522, 2535, 2543, 2550, 2555).

INFORMAŢII

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, şi nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 al lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. *Soare V. Mircea.* Ne-aţi trimes cu 110 lei mai mult pentru abonament. Ce să vă trimetem de aceşti bani?

5. *Prof. N. Ducaru.* Am primit pe numele D-voastră două abonamente pe două adrese diferite. Amândouă aceste adrese sunt bune?

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timişoara.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

ANUL XXVII. IANUARIE 1948 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 250 LEI ANUAL PENTRU PARTICULARI
ȘI 500 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 500 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. ING. GH. V. NICULESCU: ECUATII CU RADACINILE IN PROGRESIE ARITMETICA.
2. NOTA MATEMATICA 22, 23, 24.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 175, 794, 1568, 1643, 1991, 2338, 2408, 2412, 2416, 2427, 2437, 2438, 2447. 2452, 2453, 2460, 2469, 2476, 2480, 2490, 2492, 2499, 2501, 2505, 2506, 2508, 2508, 2512, 2513.
6. PROBLEME PROPUSE: 2571-2577.
7. INFORMATII.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebue să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Anunţăm cu plăcere că începând cu acest număr fac parte din Comitetul de Conducere şi Domnii: *Gh. Dumitrescu* profesor, Colegiul naţional Sf. Sava, Bucureşti; *Virgil Ciobanu, Emil Domide, I. Popescu-Văleni* şi *Ioan Probst* ingineri U. D. R.

Ţinem să aducem la cunoştinţa colaboratorilor noştrii următoarele:

1° În ultimul timp am primit subvenţii dela D-nii Ing. *I. Man* (750 lei), Ing. *Murgu Marţian* (250 lei), Ing. *N. Oprişa* (150 lei) şi Ing. *Em. Şendrea* (250 lei).

2° D-l Ing. *D. Stănescu* ne-a făcut 12 abonamente printre inginerii dela Anina.

3° D-l Prof. *V. Herman* ne-a făcut 7 abonamente la liceul teoretic din Reşiţa.

4° Studentul *Lăpuşan Val.* ne-a făcut prin D-nii Prof. *Băleanu M.* şi *Popescu Gh.* 23 abonamente la liceul teoretic din Lugoj.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara, conţinând articole, note, probleme propuse şi rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci**, Politehnica, Timişoara.

Administraţia revistei aduce la cunoştinţa generală următoarele:

1. Începând cu acest număr, nu se mai pot face decât abonamente dela no. 6 (inclusiv) cu preţul de 155 lei sau dela no. 7 (inclusiv) cu preţul de 125 lei.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV şi XXVI sunt epuizate. Celelalte volume broşate se găsesc de vânzare cu preţul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediţiei. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecţie chiar din volumele epuizate. Preţul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediţia.

5. Se primesc reclamaţii că se pierde revista prin poştă. Aceste reclamaţii sunt adunate în ordinea sosirii lor şi vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamaţie de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariţiei acelui număr.

6. Tot ce priveşte administraţia se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Harry Truman, Nr. 1, Timişoara I. Reclamaţiile ce necesită răspuns vor fi însoţite de o carte poştală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat poştal D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — No. 11. TIMISOARA, IANUARIE 15

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 250 lei pentru particulari și 500 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Harry Truman No. 1.

ECUAȚII CU RĂDĂCINILE ÎN PROGRESIE ARITMETICĂ.

DE

Ing. GH. V. NICULESCU

L-t. C-dor în retragere.

În cele ce urmează vom da câteva rezultate asupra rădăcinilor ecuațiilor ce se obțin prin derivarea succesivă a unei ecuații cu rădăcinile în progresie aritmetică.

Considerăm ecuațiile cu rădăcinile în progresie aritmetică: $a, a \pm nr$, de grad $2n+1$ (impar) și $a \pm nr$, $(n = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1)$ de grad $2n$ (par). Aceste ecuații se scriu:

$$(x-a)\prod_{n=1}^{n}[(x-a)^2 - n^2 r^2] = 0,$$

$$\prod_{n=1}^{n}[(x-a)^2 - (2n-1)^2 r^2] = 0.$$

Punând: $x - a = y$, obținem ecuațiile:

$$f(y) = y\prod_{n=1}^{n}(y^2 - n^2 r^2) = 0,$$

$$\varphi(y) = \prod_{n=1}^{n}[(y^2 - (2n-1)^2 r^2] = 0,$$

cari dezvoltate devin:

$$(1) \qquad f(y) = y^{2n+1} - y^{2n-1} r^2 \sum_1^n n^2 + y^{2n-3} r^4 \sum_1^n n^2 (n+1)^2 - \cdots \pm 1^2 . 2^2 . 3^3 \ldots n^2 r^{2n} y = 0$$

$$(2) \qquad \varphi(y) = y^{2n} - y^{2n-2} r^2 \Sigma (2n-1)^2 + y^{2n-4} r^4 \Sigma (2n-1)^2 (2n+1)^2 - \cdots \pm 1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots (2n-1)^2 r^{2n} = 0.$$

Să reamintim și două probleme de cari vom avea nevoie la studiul propus, *Problema 10, Cap. LII*, Culegere de probleme de *A. G. Ioachimescu.*

„Dacă ecuația $f(x) = 0$, ale cărei rădăcini sunt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are o rădăcină comună x_1 cu ecuația $f''(x) = 0$, care nu anulează pe $f'(x) = 0$, să se arate că avem,

$$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{x_1 - x_k} = 0.$$

Să se deducă, că dacă $f(x) = 0$ e de gradul al treilea, rădăcinile ecuației sunt în progresie aritmetică".

Problema 11 Cap. LII, vol. citat:

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile lui $f(x) = 0$ și $x_2', x_3', x_4', \ldots, x_n'$ ale ecuației $f'(x) = 0$, avem:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1 - x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_1 - x_k'}.$$

Asupra pr. 10, facem observația că $f(x) = 0$ poate fi cu rădăcinile în progresie aritmetică având chiar gradul $2n+1$, căci orice ecuație (1) verifică relația din probl. 10, fiind suficient a lua $x_1 = a$, iar pentru restul rădăcinilor $a \pm nr$, cu care ocazie mai observăm că ecuația (1) nu ar mai avea nevoie de $f'(a) \neq 0$ și de $f''(a) = 0$ pentru ca rădăcinile ei să verifice relația pr. 10. [Totuși ec. (1) fiind o ec. cu răd. în progr. aritm. răspunde condițiunilor enunțului pr. 10, adică are $f'(a) \neq 0$ și $f''(a) = 0$]. Ca atare orice ecuație având rădăcinile de forma a, $a \pm p_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, k)$, răspunde relației pr. 10, făcând $x_1 = a$, fără deci a mai fi nevoie de restul condițiilor. Dar relația pr. 10 mai poate fi verificată și de rădăcinile ecuației (2), dacă luăm $x_1 = a$, a fiind aci semisuma a două rădăcini egal depărtate de extreme a ecuațiilor (1) și (2). După aceste critici aduse pr. 10, să trecem la extinderea ei. Am văzut că ecuației (1) îi putem aplica pr. 10, dar dacă tot ec. (1) îi aplicăm și pr. 11, care leagă rădăcinile lui $f(x) = 0$ cu acelea ale lui $f'(x) = 0$, atunci obținem pentru $f'(y) = 0$ relația,

$$\sum_{k=2}^{2n} \frac{1}{a - y_k'} = 0,$$

similară cu cea din pr. 10. Să considerăm acum pe $f''(y)=0$. Ea răspunde pr. 10 având: $f''(a)=0$, $f'''(a)\neq 0$ şi $f'''(a)=0$. Deasemenea $f^{IV}(y)=0$ prin intermediul pr. 11. Cât despre $f^{IV}(y)=0$, ea se comportă ca $f(y)=0$, sau ca $f''(y)=0$. In concluzie, din aproape în aproape, găsim că între rădăcinile oricărei derivate a ec. (1) avem relaţia pr. 10., care deci este extinsă pentru ecuaţia (1). Să cercetăm cazul ec. (2) de grad par. Am văzut că ecuaţia însăşi verifică relaţia dacă luăm $x_1=a$, semisuma a două rădăcini egal depărtate. Apoi $\varphi'(y)=0$, este o ecuaţie care are: $\varphi'(a)=0$, $\varphi''(a)\neq 0$, şi $\varphi'''(a)=0$, $\varphi'(y)=0$ se comportă întocmai ca şi ecuaţia (1). pe care am studiat-o. Cu aceste considerente putem enunţa generalizarea pr. 10, astfel:

Teorema I. *Dacă* $F(y)=0$ *este o ecuaţie cu rădăcinile în progresie aritmetică, atunci între rădăcinile:* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p$ *ale unei derivate oarecare a lui* $F(y)=0$ *avem relaţia:*

$$\frac{1}{a-\alpha_1}+\frac{1}{a-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{a-\alpha_p}=0$$

a, fiind constanta progresiei, adică semisuma a două rădăcini egal depărtate de extreme.

Tot despre rădăcinile derivatelor lui $f(y)=0$ şi $\varphi(y)=0$ vom mai da câte-va rezultate. Observăm că o derivată oarecare obţinută prin derivarea succesivă a lui $f(y)=0$, sau a lui $\varphi(y)=0$, este, sau de forma: $f(y^2)=0$ sau de forma $y f(y^2)=0$, unde $f(y^2)=0$ este o ecuaţie având pe y, numai la puteri pare. Făcând înlocuirea: $y_2=z$, obţinem ecuaţia în z, ce presupunem a avea gradul p. Dar orice derivată va avea un termen liber de necunoscută, obţinut direct din derivarea lui $F(y)=0$, sau obţinut după ce am scos pe y ca factor. Acest termen liber, ca la orice ecuaţie, reprezintă produsul rădăcinilor. Pentru o derivare a lui $f(y)=0$ de ordinul $2k$, obţinând o ecuaţie de grad $2n-2k=2p$, vom avea de făcut identificarea,

$$z_1\times z_2\times z_3\times\ldots\times z_p=r^{2p}\,\Sigma\, 1^2.2^2.3^2\ldots(n-k)^2,$$

ce nu o mai repetăm pentru $\varphi(y)=0$, când Σ are altă valoare, restul demonstraţiei fiind acelaş. Dacă luăm cantităţile: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$ astfel ca să avem,

$$a_1\times a_2\times a_3\ldots\times a_p=\Sigma\, 1^2.1^2.2^2.3^2\ldots(n-k)^2,$$

atunci din identificare rezultă rădăcinile derivatei oarecare a ecuaţiilor $F(y)=0$ (cu rădăcinile în progr. aritm),

$$z=a\pm r\sqrt{a_1};\quad x=a\pm r\sqrt{a_2};\ldots;\quad x=a\pm r\sqrt{a_p}.$$

Acest rezultat ne permite a enunţa:

Teorema II. *O derivată oarecare a unei ecuaţii* $F(y)=0$ *(cu rădăcini în progr. aritm.) are rădăcinile sale de forma,*

$$a\pm r\sqrt{a_p}\qquad p=1, 2, 3, \ldots, p,$$

în care a_p *sunt nişte mărimi aritmetice, rezultate din rezolvarea ecuaţiei obţinute prin derivarea succesivă a lui* $F(y)=0$, *până se obţine gradul* $2p$.

Deci a_p sunt cantităţi ce le vom cunoaşte numai când putem rezolva ecuaţia obţinută prin derivare; în restul cazurilor ne mulţumim a cunoaşte numai forma rădăcinilor derivatelor lui $F(y)=0$. Vedem că forma găsită explică şi verifică cu uşurinţă Teorema I şi invers această teoremă întrevedea rezultatul din Teoreua II. — O altă cale mai puţin riguroasă, pentru a demonstra Teorema II, ar fi pornind dela adevărul că între două rădăcini consecutive ale lui $F(y)=0$ se intercalează una a derivatei $F'(y)=0$ şi mergând din derivată în derivată. — Teorema II, oferă consecinţe; astfel:

Suma rădăcinilor unei derivate oarecare a ecuaţiei $F(y)=0$ *este* $2pa$, *unde* $2p$ *este gradul la care am voit a ne opri în operaţia de derivare succesivă a lui* $F(y)=0$.

Este aproape evidentă; şi tot cu suficientă uşurinţă putem scrie,

$$x_p-x_{p-1}=x'_{p-1}-x'_p,$$

unde: $x_p=a+r\sqrt{a_p}$; $x'_p=a-\sqrt{a_p}$, etc. egalitate ce oferă consecinţa: *Diferenţa între două rădăcini consecutive este egală tot cu o diferenţă de alte 2 rădăcini consecutive, primele ocupând loc în extrema dreaptă, celelalte acelaşi ranguri în extrema stângă.*

Se observă foarte uşor că dacă o derivată a lui $f(y)=0$, sau $\varphi(y)=0$ are gradul său impar, acea derivată are pe a ca rădăcină. La aceste derivate avem deci, pe lângă rădăcinile găsite: $a\pm r\sqrt{a_k}$ şi rădăcina a, astfel că o nouă teoremă se poate enunţa:

Teorema III. *Toate ecuaţiile având grad impar, obţinute prin derivarea succesivă a unei ecuaţii* $F(y)=0$ *(cu răd. în progr. aritm.) au totdeauna cel puţin 3 rădăcini în progresie aritmetică.*

Ca urmare şi ecuaţia de gradul al treilea, ce-o obţinem derivând succesiv pe $F(y)=0$, până obţinem acest grad, este o ecuaţie cu cele 3 rădăcini, în progresie aritmetică. Derivând succesiv pe $f(y)=0$ şi $\varphi(y)=0$ până la gradul III, obţinem două ecuaţiuni ale căror rădăcini sunt:

$$x_1=a;\ x_{2,3}=a\pm r\sqrt{(n+1):2},\quad \text{din der. lui } f(y)=0$$

$$x_1=a;\ x_{2,3}=a\pm r\sqrt{2n+1},\quad \text{„ „ „}\varphi(y)=0,$$

rădăcini ce sunt în funcţie de a, r şi n, elemente cunoscute în $F(y)=0$. Căutând toate valorile lui n, pentru cari radicalii $\sqrt{(n+1):2}$ şi $\sqrt{2n+1}$ devin numere întregi, obţinem:

Teorema IV. *Ecuaţia cu rădăcinile în progresie aritmetică de gradul* $4m^2-1$ *cât şi cea de gradul* $4m(m+1)$ *în cari luăm:* $m=1,2,3,\ldots,m$, *au fiecare rădăcini comune cu ecuaţiile de gradul trei ce se obţin prin derivarea lor succesivă.*

Aceste rădăcini comune sunt trei: a, $a\pm mr$ *pentru ecuaţia de grad* $4m^2-1$ *şi două:* $a\pm(2m+1)r$ *pentru cealaltă ecuaţie.*

Incheiem aceasta lucrare cu observaţiunea că ecuaţiunile:

$$f(x)=A_1(x-a)^{2n+1}+A_2(x-a)^{2n-1}+\cdots+A_n(x-a)^3+A_{n+1}(x-a)=0$$

$$\varphi(x)=B_1(x-a)^{2n}+B_2(x-a)^{2n-2}+\cdots+B_{n-1}(x-a)^2+B_n(x-a)=0$$

se bucură de proprietatea ecuaţiilor $F(y)=0$, căci toate derivatele lor de grad impar admit pe a ca rădăcină Ele generalizează articolul: Asupra ecuaţiilor cu rădăcinele în progresie aritmetică, „G. M“, anul XLI, pag. 378, adică generalizează ecuaţiile $f(y)=0$ şi $\varphi(y)=0$. Deci, vom putea aplica şi ecuaţiilor $f(x)=0$ şi $\varphi(x)=0$, toate teoremele şi aplicaţiile citate şi stabilite aci.

NOTE MATEMATICE

22. — *Un problème d'analyse diophantienne multigrade.*

Résoudre le système

$$a_1^p+a_2^p-a_3^p=b_1^p+b_2^p-b_3^p=c_1^p+c_2^p-c_3^p=d_1^p+d_2^p-d_3^p=\cdots,\ (p=2,4).$$

Solution. On obtient facilement des solutions de ce système en posant

$$a_3^2=a_1^2+a_2^2;\ b_3^2=b_1^2+b_2^2;\ c_3^2=c_1^2+c_2^2,\ \text{etc.}$$

c'est-à-dire, en désignant par S_2 la valeur commune des quantités $a_1^2+a_2^2-a_3^2$, $b_1^2+b_2^2-b_3^2$, etc., au cas où $S_2=0$. Pour que la système soit satisfait également au degré 4, on doit avoir

$$a_1a_2=b_1b_2=c_1c_2=\cdots$$

On est donc ramené à la recherche des *triangles rectangles rationnels (entiers) de même aire.* Les triangles rectangles rationnels étant désignés sous le nom de triangles de *Pythagore*, nous pouvons dire que nous avons à déterminer des *triangles de Pythagore équivalents.*

On connait des formules permettant d'obtenir un couple de triangle de *Pythagore* équivalents. (Voir p. ex. l'ouvrage „Sur les Egalités Multigrades“, par *A. Gloden*, 1938, pag. 36). Dans un article intitulé „Rational Right Triangles with Equal Areas“, Scripta Mathematica, sept. 1943, pp. 155—161, et déc. 1943, pp. 265—267, *W. P. Witlock*. Tr. étudie ces triangles en ajoutant à ses recherches beaucoup de résultats connues. Il y rappelle également que *Fermat* a donné une méthode permettant d'obtenir n de ces triangles, n étant un entier donné. Nous renvoyons le lecteur aux formules qui y sont développés ou rappelées.

Exemples numériques. (un nombres minima).

1. Un *couple* de triangles de *Pythagore* équivalents

$$a_1=12,\ a_2=35;\quad b_1=20,\ b_2=21.$$

aire commune $=210$.

A partir de ce couple nous obtenons la multigrade,

$$12^p+35^p-37^p=20^p+21^p-29^p,\ (p=2,4).$$

2. Un *triplet* de triangles de *Pithagore* équivalents,

$$a_1=56,\ a_2=390;\ b_1=120,\ b_2=182;\ c_1=105,\ c_2=208.$$

aire commune $=10.920$.

D'où

$$56^p + 390^p - 394^p = 120^p + 182^p - 218^p =$$
$$105^p + 208^p - 233^p, \ (p = 2, 4).$$

3. Un *quadruplet* de triangles de *Pithagore* équivalents

$$a_1 = 518, \ a_2 = 1320; \ b_1 = 280, \ b_2 = 2442;$$
$$c_1 = 231, \ c_2 = 2960; \ d_1 = 111, \ d_2 = 6160;$$

aire commune $= 341880$.

D'où,

$$518^p + 1320^p - 1418^p = 280^p + 2442^p - 2458^p =$$
$$231^p + 2960^p - 2969^p = 111^p + 6160^p - 6161^p,$$
$$(p = 2, 4)$$

4. Un *quintuplet* de triangles de *Pythagore* équivalents:

$$a_1 = 2805, \ a_2 = 52416; \ b_1 = 3168, \ b_2 = 46410;$$
$$c_1 = 5236, \ c_2 = 28080; \ d_1 = 6006, \ d_2 = 24480;$$
$$e_1 = 8580, \ e_2 = 17136.$$

aire commune $= 72.513.440$.

D'où,

$$2805^p + 52416^p - 52491^p = 3168^p + 46410^p - 46518^p =$$
$$5236^p + 28080^p - 28564^p = 6006^p + 24480^p - 25206^p =$$
$$8580^p + 17136^p - 19164^p, \ (p = 2, 4).$$

A. GLODEN

---

23. — *Asupra problemei 2031.* În R. M. T. din Martie 1944, se demonstrează cu ajutorul teoremei lui *Ptolomeu*, următoarea proprietate:

„Printr'un punct A *al unui cerc, se duc coardele* AB, AC, AD, *astfel ca* AD *să bisecteze unghiul* BAC.

Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{AB + AC}{2} < AD".$$

1) Ducând bisectoarea exterioară a unghiului BAC, care taie cercul dat în punctul E(AC>AB), avem şi inegalitatea

$$\frac{AC - AB}{2} < AE.$$

Demonstraţia se poate face în mod analog cu acea dată, aplicând teorema lui *Ptolomeu* patrulaterului BAEC şi observând că în acest caz EB = EC.

2) Se mai poate da inegalităţilor de mai sus şi o soluţie trigonometrică. Într'adevăr ducând diametrul AF şi notând unghiul DAF cu α, avem în triunghiurile ce se formează următoarele egalităţi:

$$a) \quad AB = 2R\cos\left(\alpha + \frac{A}{2}\right); \quad AC = 2R\cos\left(\frac{A}{2} - \alpha\right)$$
$$AD = 2R\cos\alpha \quad ; \quad DF = AE = 2R\sin\alpha$$

Ţinând seamă de valorile de mai sus, pe care le înlocuim în inegalităţile evidente,

$$b) \quad \cos\left(\alpha + \frac{A}{2}\right) + \cos\left(\frac{A}{2} - \alpha\right) \leqq 2\cos\alpha$$

$$c) \quad \cos\left(\frac{A}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{A}{2} + \alpha\right) \leqq 2\sin\alpha$$

obţinem:

$$(b') \qquad \frac{AB + AC}{2} \leqq AD$$

$$(c') \qquad \frac{AC - AB}{2} \leqq AE.$$

C PT AURELIAN STAN

---

24. — *Asupra problemei 1906.* — Vom da în rândurile de mai jos, o altă soluţie problemei:

Să se găsească un număr de forma $abba$, căruia adunându-i 4 să ne dea un patrat perfect. Rădăcina patrată a numărului $abba + 4$ va fi un număr de două cifre xy. Ecuaţia problemei este:

$$(10x + y)^2 = 1001a + 110b + 4,$$

sau:

$$99x^2 + 22xy + (x - y)^2 - 4 = 11(91a + 10b)$$

de unde:

$$(x - y)^2 - 4 = 0, \text{ sau } (x - y)^2 - 4 = M\,11.$$

În primul caz, avem: $x - y = \pm 2$, iar în al doilea caz, luăm pentru $M\,11 + 4$, valorile posibile, ţinând seamă că diferenţa $x - y$ poate fi cel mult 9. Găsim:

$$(x - y)^2 = 15, \ 26, \ 37, \ 48, \ 59, \ 70, \ 81.$$

Reţinem numai pe 81, singurul pătrat perfect din şirul (1).

Avem:

$$x - y = \pm 2 \text{ şi } x - y = \pm 9.$$

Soluțiile acceptabile sunt:

$$35^2 = 1221 + 4 \text{ și } 46^2 = 2112 + 4.$$

ILIE CONSTANTINESCU

EXAMEN DE ADMITERE LA POLITEHNICA DIN TIMIȘOARA

Facultatea de Mine și Metalurgie

(10 — 12 Octombrie 1947).

GEOMETRIE.

1. Se dă un triughiu A B C cu S = 32 m². Pe $\overline{BC}$ se ia un punct D, astfel ca $\overline{BD} = \frac{1}{4} BC$ și se duce A D. Pe A D se ia un punct E, astfel ca $DE = \frac{1}{4} AD$. Se duc BE și E C. Să se calculeze suprafețele triunghiurilor A E B, A E C și B E C.

2. Un coș de fabrică este văzut de la o distanță de 20 m. sub un unghiu de 60°, iar dela 60 m. sub un unghiu de 30°. Care este înălțimea coșului?

3. Două cercuri concentrice formează o coroană lată de de 2,60 m a cărei suprafață este de 100 m². Să se afle razele cercurilor.

4. Muchea unui cub este de 45 cm. să se afle volumul sferei circumscrise.

5. Un triunghiu echilateral are $\overline{AB} = 7$ cm. Prelungim $\overline{BC}$ cu o lungime $\overline{CD} = 70$ cm. Să se afle volumul solidului provenit din rotirea triunghiului A B C în jurul perpendicularei dusă în punctul D.

6. Să se calculeze coordonate punctelor de intersecție ale cercului $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ cu dreapta $y = 2x - 1$.

7. Să se afle distanța dela punctul M (3, — 1) la dreapta.

$$2x - 4y - 5 = 0.$$

TRIGONOMETRIE.

1° Fiind dat un triunghiu isoscel, în care se cunoaște unghiul din vârf $A = 2\alpha$ și una din laturi $\overline{AB} = a$, se ia pe această latură un punct D, în așa fel ca $\overline{BD} = m$. Să se ducă dreapta $\overline{DEF}$ făcând unghiul $\sphericalangle BDE = x$. Să se determine $\sphericalangle x$ (prin tangenta sa) în așa fel ca să avem:

$$\overline{DE} = \overline{EF}.$$

2° Intr'un triunghiu dreptunghiu A B C în care A = 90° se dă o catetă $\overline{AC} = b$ și $\sphericalangle \alpha$ pe care îl face mediana $\overline{BD}$ cu ipotemuza. Să se rezolve triunghiul notându-se $\sphericalangle B = \sphericalangle x$.

3° Intr'un triunghiu isoscel A B C se dă unghiul din vârf $= \alpha$. Să cere să se calculeze: p, S, R și r.

Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\cos 3x - \cos 3y = 0, \quad \cos x - \cos y = \frac{1}{2}.$$

ALGEBRA

I. Să se afle limita expresiei:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \quad \text{pentru } x \to \infty.$$

II. Să se calculeze derivata funcțiunei:

$$y = \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

III. Să se determine valoarea lui a din ecuația:

$$x^4 + x^3 - 2x^2 + ax + 4 = 0,$$

știind că are rădăcina $1 + i$. Să se rezolve apoi complet ecuația.

IV. Să se reprezinte grafic funcțiunea

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$$

V. Să se găsească rădăcinile comune ecuațiilor:

$$x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0.$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul LIII, No. 4, Decembrie 1947.

Asupra unor funcțiuni transcendente, de *V. Vâlcovici.* Asupra curbelor anarmonice plane, de *N. N. Mihăileanu.* Raport pentru acordarea premiului de „Istoria Matematicii" în 1947. Note matematice. Probleme rezolvate și propuse.

2. *A. Gloden.* Table des solutions dela congruence $x^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, pour $500.000 < p < 600.000$.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 175. — *O trăsură se coboară pe o șosea înclinată cu panta* $\frac{1}{18}$ *în virtutea greutății ei* ($g = 9,81$), *în două minute. Să se afle câte învârtituri au făcut roțile dinainte și cele dinapoi dacă diametrele lor sunt 0,60 și 0,90 m.*

C. TEODORESCU

Soluție dată de D-l Prof. *Virgil Ghițescu* (Brașov). Fie M massa trăsurii și P = M × g greutatea ei ($g = 9,81$ m/sec²). Prin faptul că enunțul problemei nu menționează, vom considera ca neglijabile frecările la axele roților și cu șoseaua precum și rezistența aerului la coborârea trăsurii. Unghiul de pantă fiind α, forța care antrenează trăsura la vale este $F = P \sin \alpha$. Fie w accelerația ce se imprimă acestei mișcări.

Avem $P \sin \alpha = M \times w$.

Rezultă $w = g \sin \alpha$, massa eliminându-se asfel:

Mişcarea trăsurii este rectilinie uniform accelerată de ecuaţie,

$$s = \frac{1}{2}(g \sin \alpha) t^2.$$

Făcând pe $t = 120$ sec, pe $\sin \alpha = 1/\sqrt{325}$, numerele de învârtituri făcute de roţi sunt

$$n_1 = \frac{9{,}81 \times 14.400}{2 \times \sqrt{325} \times 3{,}14 \times 0{,}60} = 2080 \text{ înv.}$$

$$n_2 = \frac{9{,}81 \times 14{,}400}{2 \times \sqrt{325} \times 3{,}14 \times 0{,}90} = 1386 \text{ înv.}$$

Problema 794.*) — *Să se stabilească că avem*

$$\Sigma r_b r_c (r_a - r)(r_b + r_c) = 4 p^2 r R + \frac{2 S p^2 r (a \cos A + b \cos B + c \cos C)}{p}.$$

RAMNICEANU I. CRISTIAN

Soluţia. Ţinem seama de formulele cunoscute

$$r_a = p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A, \quad r_a - r = a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A,$$

$$r_b + r_c = 4 R \cos^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Prima parte a identităţei din enunţ se scrie

$$\Sigma r_b r_c (r_a - r)(r_b + r_c) =$$

$$4 R p^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C \Sigma a \cos^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Dar: $p^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = S = p r,$

încât avem mai departe

$$= 4 R S \Sigma a \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 2 R S \Sigma a (1 + \cos A)$$

$$= 2 R S \Sigma a + 2 R S \Sigma a \cos A$$

$$= 2 R p r . 2 p + 2 R p r \Sigma a \cos A$$

$$= 4 p^2 r R + \frac{2 R p^2 r \Sigma a \cos A}{p},$$

adică partea a doua a relaţiei din enunţ.

Gh. Th. Gh.

Problema 1568. — *Se consideră un cilindru înscris într'o sferă cu raza* R. *Să se determine înălţimea cilindrului astfel ca volumul cuprins între suprafaţa sferei şi suprafaţa laterală a celor două conuri cu vârful în centrul sferei şi bazele cele două baze ale cilindrului, să fie egal cu volumul celor două calote sferice determinate de bazele cilindrului.*

D. GEORGESCU

Soluţia. Dacă h este înălţimea unei calote aparţinând unei sfere de rază R, volumul ei este dat de formula,

$$\frac{1}{3} \pi h^2 (3 R - h).$$

Să considerăm o zonă sferică cu bazele de aceiaşi parte a centrului sferei şi depărtate de acest centru cu distanţele a şi b $(a > b)$. Volumul zonei va fi diferenţa volumelor a două calote, adică

$$\frac{1}{3} \pi (R - b)^2 (2 R + b) - \frac{1}{3} \pi (R - a)^2 (2 R + a) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi (b^3 - a^3) - \pi R^2 (b - a).$$

Presupunând că cele două baze ale zonei sunt echidistante de centrul sferei, adică $b = -a$, volumul zonei va fi,

$$-\frac{2}{3} \pi a^3 + 2 \pi a R^2 = \frac{2}{3} \pi a (3 R^2 - a^2).$$

Dacă însemnăm cu $2a$ înălţimea cilindrului, cu ajutorul formulelor de mai sus, ecuaţia problemei este,

$$\frac{2}{3} \pi a (3 R^2 - a^2) - \frac{2}{3} \pi a (R^2 - a^2) =$$

$$\frac{2}{3} \pi (R - a)^2 (2 R + a)$$

sau,

$$a^3 - 5 a R^2 + 2 R^3 = 0.$$

Această ecuaţie are rădăcina $a = 2R$ care nu corespunde problemei. Indepărtând această soluţie, ne rămâne o ecuaţie de gr. II. care are singura rădăcină pozitivă $a = R(\sqrt{2} - 1)$. Înălţimea cilindrului este deci $2R(\sqrt{2} - 1)$.

Soluţii foarte bune dela D-nii: *Begu I. Şt., Berinde L. Titus, Dăscălescu Şt. Hr., Moldovan Cornel, Segal Zigu* şi *Wegener Eugen.*

In afară de aceste soluţii s'au mai primit şi şase soluţii greşite.

Gh. Th Gh.

Problema 1643. — *Să se rezolve ecuaţia,*

$$\prod_{k=2}^{6} (x^2 + k) = 12 x^6 + 60 x^4.$$

S-LT MIRCEA GRUMAZESCU

---

*) Enunţ rectificat.

Soluția. Scriind prima parte dezvoltat se constată imediat că avem factorul x^2+5 care anulat dă rădăcinile: $x_{1,2}=\pm i\sqrt{5}$. După îndepărtarea acestui factor, ecuația rămasă este

$$(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+6)=12x^4.$$

Grupând factorii egal depărtați de extremi, ecuația se mai poate scrie,

$$(x^4+8x^2+12)(x^4+7x^2+12)=12x^4$$

unde împărțind cu x^4 și făcând substituția:

$$x^2+\frac{12}{x^2}=y \tag{1}$$

ajungem la ecuația

$$(y+8)(y+7)=12,$$

care ordonată și rezolvată dă

$$y_1=-11,\quad y_2=-4.$$

Înlocuind aceste valori în (1) se obțin rădăcinile,

$$\begin{cases} x_{3,4,5,6}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-11\pm\sqrt{73})} \\ x_{7,8,9,10}=\pm\sqrt{-2\pm 2i\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{2}$$

Ultima grupă de rădăcini nu are o formă definitivă. Folosind formula care dă rădăcina pătrată dintr'un număr complex,

$$\pm\sqrt{a\pm ib}=$$
$$\pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)}\pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\right]$$

(în această formulă b este presupus pozitiv; semnele din fața lui i din ambele părți se corespund), se obțin pentru ultimele patru rădăcini, valorile

$$x_{7,8,9,10}=\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}\pm i\sqrt{\sqrt{3}+1}.$$

Singurele soluții ce pot fi luate în considerare sunt ale D-lor Prof. *Hr. Șt. Dăscălescu* (R.-Sărat) și *Eug. Wegener* (București). D-lor au lăsat soluțiile problemei sub forma (2)

Gh. Th. Gh.

Problema 1991*) — *Dacă*

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-(b+c)^2}}{b+c},\qquad y=\frac{b+\sqrt{b^2-(c+a)^2}}{c+a},$$
$$z=\frac{c+\sqrt{c^2-(a+b)^2}}{a+b},$$

atunci există relația

$$E=\left[\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{z-1}{z+1}\right]^2=-\frac{r^2}{p^2},$$

a, b, c, p, r fiind notațiile obișnuite într'un triunghiu oarecare.

I. I STAMATE

Soluția. Avem

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=\left[\frac{a-b-c+\sqrt{(a+b+c)(a-b-c)}}{a+b+c+\sqrt{(a+b+c)(a-b-c)}}\right]^2=$$
$$\left(\frac{\sqrt{a-b-c}}{\sqrt{a+b+c}}\right)^2=\frac{a-p}{p}$$

și analog pentru celelalte expresii. Rezultă

$$E=-\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}=-\frac{S^2}{p^4}=-\frac{r^2}{p^2}.$$

Soluție. dată de D-nii: *Chiriac C-tin, Novac I. I.*, și *Wegener Eug.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2338. — *Într'un semicerc de centru* O, *împărțim raza* O U *în trei părți egale:*

$$\overline{OI}=\overline{IJ}=\overline{JU}.$$

Perpendiculara în I *pe rază taie cercul în* A (*și* A'); A J *retaie cercul în* B. B *se proiectează pe raza* O U *în* K. *Să se arate că:*

1°. $\overline{IA}$ *este două treimi din latura patratului înscris.*

2°. $\dfrac{\overline{JB}}{\overline{JA}}=\dfrac{5}{9}$; 3°. $\dfrac{\overline{KJ}}{\overline{KU}}=\dfrac{5}{4}$.

N. N. MIHAILEANU

Soluție dată de d-nii *David Fränkel* (P. T.) și *Ioan N. Gligor* (student, Aliuș), Notăm raza cercului cu r. În triunghiul dreptunghic O A I

$$\overline{AI}^2=r^2-\tfrac{1}{9}r^2=\tfrac{8}{9}r^2\qquad AI=\tfrac{2}{3}r\sqrt{2},$$

ceeace justifică primul punct al enunțului.

Triunghiul OAJ este isoscel, fiindcă AI este înălțime și mediană deci $\overline{AJ}=\overline{AO}=r$. Fie U' diametralul lui U; exprimăm în două moduri, puterea punctului J față de cerc.

$$\overline{JA}.\overline{JB}=\overline{JU}.\overline{JU'}=\tfrac{1}{3}r(r+\tfrac{2}{3}r)=\tfrac{5}{9}r^2,\ JB=\tfrac{5}{9}r;$$

de aici rezultă imediat relația 2°).

Din triunghiurile asemenea JIA, JKB obținem, observând că $\overline{JI}=\overline{UJ}$.

$$\frac{9}{5}=\frac{\overline{JI}}{\overline{JK}}=\frac{\overline{JK}+\overline{UK}}{\overline{JK}}=1+\frac{\overline{UK}}{\overline{JK}}\ ^{*}_{*}\ \frac{\overline{UK}}{\overline{JK}}=\frac{4}{5}.$$

*) Enunț rectificat.

Foarte bune soluţii geometrice au dat şi d-nil: *Mihai Bogza* (Lic. Roman), *Gh. A. Grigore* (student), *Gh. T. Goldiş*, (P. T.), *Vasile I. Ilea* (P. T.), *Marius Mazilu* (Făgăraş), *Aurel Mitric* (P. T.), *Mircea Moldovan* (lic.Beiuş), *Ulpius Nedelcu* (Timişoara), *Ioan I. Novac* (lic. Brăila), *Dionisie Palade* (P. T.), *Nicolae Safta* (Caracal), *Ioan I. Sasu* (P. T.), *Petre A. Stanciu* (P. T.) şi un anonim.

Alte soluţii geometrice dela d-ra: *Rodica Diea* şi dela d-nii: *M. Arnăutu*, *C. Chiriac*, *L. Coman*, *A. Dobrişan*, *O. Man*, *M. Meteş*, *S. Pali*, *D. Popescu*, *C. Roman*, *T. Stern*, *F. Stroescu*, *H. Teiuşan*, *P. Teodorescu*, *C. Tincu*, *C. Vlăduţ*.

Au rezolvat problema prin *trigonometrie* d-nii *I. Bîrănaş*, *I. N Constantinescu*, *M. Giurconiu*, *F. Gotthard*.

Soluţii analitice dela d-ra *Alexandrina Costin* şi dela d-nii: *M. Arnăutu*, *C. Balanişcu*, *A. Coţiu*, *T. Guttman*, *E. Mazavei*, *V. O. Popa*, *M. Prisăcaru*, *I. Şchiopu*, *A. Stoian*, *I. Titero*, *C. Vlăduţ*.

N. N. M.

Problema 2408. — *Dându-se două puncte pe o parabolă, să se găsească un al treilea punct, astfel ca normalele la parabolă, duse în cele trei puncte să fie concurente*

C-PT. M. GRUMAZESCU

Soluţia I-a dată de d nii: *Ilie N. Constantinescu* (P. T.), *Ulpius Nedelu* (Şcoala Ofiţeri Geniu, Bucureşti), şi *Petre P. Teodorescu* (cl. VII, lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Se ştie că *cercul care trece prin picioarele normalelor duse din acelaşi punct la o parabolă, trece prin vârful ei* (teorema lui *Joachimstal*[1]). Ducem deci un cerc prin cele două puncte date şi prin vârful parabolei şi al patrulea punct comun al lor este soluţia problemei.

De altfel, *suma ordonatelor acestor patru puncte este nulă.*

Soluţia a II-a dată de D-nii *Constantin Corduneanu* (cl. VII, Colegiul Predeal) şi *Ioan N. Gligor* (student, Aliuş).

Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ cele două puncte date, pe parabola $y^2 = 2px$ şi $M_3(x_3, y_3)$, punctul căutat. Ecuaţiile normalelor sunt,

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1), \text{ etc.}$$

Condiţia de concurenţă se scrie,

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & y_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix}$$

sau, ţinând seama de faptul că punctele verifică ecuaţia parabolei,

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^3 \\ 1 & y_2 & y_2^3 \\ 1 & y_3 & y_3^3 \end{vmatrix} = (y_1 + y_2 + y_3)\, V(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

V fiind determinantul *Vandermonde*, diferit de zero dacă punctele sunt distincte. Rezultă că,

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

ceea ce determină poziţia lui M_3.

Soluţii asemănătoare au mai dat D-nii: *Cârciu Ioan*, *Al. Dobrişan* (Politehnica, Timişoara): *Al. François* (Brăila), *R. Sp. Haret* (Lic. Francez, Bucureşti); *I. T. Munteanu* (Lic, Predeal); *I. I. Novac* (Lic. Brăila).

Problema 2412. — *Dacă ecuaţia $f(x)$ are toate rădăcinele reale şi ecuaţia,*

$$f^{(n-1)}(x) + (a+b) f^{(n)}(x) + ab f^{(n+1)}(x) = 0,$$

are toate rădăcinile reale.

RADU FRUNZA

Soluţie. Reamintim întâi două proprietăţi cunoscute:

1°. *Dacă o ecuaţie $f(x) = 0$ are toate rădăcinele reale, atunci şi ecuaţia $f'(x) = 0$ are aceiaşi proprietate.*

2°. *Dacă ecuaţia $f(x) = 0$ are toate rădăcinele reale, atunci şi ecuaţia $f(x) + af'(x) = 0$ are toate rădăcinele sale reale.* (Culegere de Probleme, de *A. G. Ioachimescu*, ed. IV, p. 86).

În virtutea primei proprietăţi, dacă ecuaţia $f(x)=0$ are toate rădăcinele reale, deducem succesiv, că şi ecuaţia

$$f^{(n-1)}(x) = 0, \tag{1}$$

are toate rădăcinele reale. Ecuaţia (1) având toate rădăcinele reale, în virtutea proprietăţii 2°, urmează că şi ecuaţia,

$$\varphi(x) = f^{(n-1)}(x) + a f^{(n)}(x) = 0,$$

are toate rădăcinele reale; dar atunci tot în virtutea proprietăţii 2° şi ecuaţia,

$$\varphi(x) + b\varphi'(x) = f^{(n-1)}(x) + af^{(n)}(x) + b[f^{(n)}(x) + af^{(n+1)}(x)] =$$
$$f^{(n-1)}(x) + (a+b) f^{(n)}(x) + ab f^{(n+1)}(x) = 0,$$

are toate rădăcinele reale, ceea ce trebuia dovedit.

---

[1]) Culegere de probleme de Geometrie Analitică, Cap. XVI, problema 36.

[2]) Idem, problema 35.

Soluţii date de d-nii: *Giurconiu Mihai* (P., T) şi *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Observări: 1°. Evident că gradul ecuaţiei $f(x)=0$ trebuie să fie $>n$.

2°. D-l *Teodorescu Petre*, generalizează problema, dovedind că, *dacă ecuaţia* $f(x)=0$ *are toate rădăcinele reale şi ecuaţia,*

$$f^{(n)}(x)+(a+b+c+\cdots+l)f^{(n+1)}(x)+(ab+bc+\cdots+kl)f^{(n+2)}(x)+(abc+\cdots+jkl)f^{(n+3)}(x)+\cdots+abc\ldots jkl.f^{(n+p)}(x)=0,$$

are toate rădăcinele reale.

Problema 2416. — *Se dă triunghiul dreptunghic* BAC ($A=90^0$). *Mediana din* A *întâlneşte perpendiculara din* B *pe* BC *în* F; *iar paralela din* C *la mediana din* A *întâlneşte în* G *înălţimea din* A. *Să se arate că:*

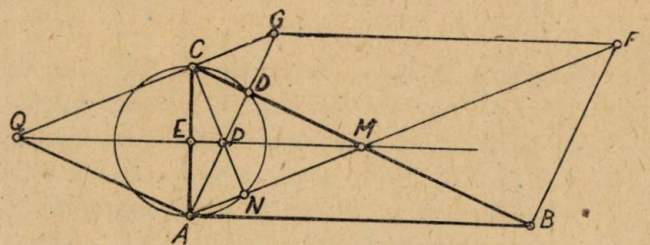
1°. FG *este paralelă cu* AB.

2°. *Patrulaterul* ABFG *este un paralelogram şi să i se calculeze suprafaţa.*

3°. *Considerând* B *mobil, să se afle locul geometric al proiecţiei vârfului* C *pe mediană şi locul geometric al intersecţiei acestei perpendiculare din* C *cu înălţimea unghiului drept,*

GH. GOLDIS

Soluţia. 1° şi 2°. Fie M mijlocul lui BC şi Q punctul de intersecţie al lui CG cu o paralelă dusă prin A la BC. Patrulaterul CMAQ este paralelogram deoarece are laturile opuse paralele. Rezultă $AQ=CM=MB$. Această egalitate spune



că triunghiurile BMF şi AQG sunt egale ca având o latură egală şi laturile paralele, (deci unghiurile egale). Din egalitatea lor rezultă că $AG=BF$. Cum aceste drepte sunt şi paralele, ca ambele perpendiculare pe BC, patrulaterul ABFG este un paralelogram ca având două laturi opuse egale şi paralele. Cum într'un paralelogram laturile opuse sunt paralele, rezultă că FG este paralelă cu AB. Dacă notăm cu S suprafaţa acestui paralelogram, avem $S=AG.BD$. Cum într'un triunghiu dreptunghic avem $b^2=a.CD$, rezultă $CD=b^2/a$ şi analog $BD=c^2/a$. Tot aşa scriind suprafaţa triunghiului în două moduri, avem $a.AD=bc$, de unde $AD=bc/a$. Pe de altă parte, triunghiurile asemeni CGD, QGA dau,

$$\frac{GA}{GD}=\frac{AQ}{CD}, \quad \text{sau} \quad \frac{GA}{GA-AD}=\frac{CM}{CD}.$$

Înlocuind aci valorile de mai sus, scoatem

$$AG=\frac{abc}{c^2-b^2} \quad \text{şi deci} \quad S=\frac{bc^3}{c^2-b^2}.$$

3°. Fie N proiecţia lui C pe mediana AM. Cum A şi C sunt fixe şi $\sphericalangle ANC=90^0$, locul va fi un cerc de diametru AC. Fie P al doilea punct al cărui loc îl căutăm. Acest punct este ortocentrul triunghiului ACM. Cum acest triunghiu este isoscel, deoarece mediana unghiului drept într'un triunghiu dreptunghiu este jumătate din ipotenuză, cea de a treia înălţime EM este perpendiculara ridicată pe mijlocul lui AC. Această dreaptă este locul căutat fiindcă segmentul AC este fix.

Au rezolvat problema D-nii: *Beşchea R., Blaga O., Bogza M., Brasch A., Cârciu I., Ciucescu P., Constantinescu G. V., Coţiu A., Crăcea I. D., Crăciunescu V. Criveanu F., Dănescu A., Diaconu V., Dobrişan A. A., Fitero I. I., Fleşeriu E., Gherlan I. V., Gheţu G. E., Giurconiu M., Haret Sp. R., Hurezeanu R., Iovănel Gh., Man I., Măncescu N. I., Manolescu G., Mărginean A. I., D. S., Marinescu, Moldovan M., Neguţ, A. I., Novac I. I., Pali S., Pantea N. A., Popa D. V., Purcea M. I., Stan P., Stanciu I., Mih. Val., Stănilă D. G-B., Teodorescu P. P., Tucă M., Turbuţiu Gh. Gh.*

Gh. Th Gh.

Problema 2427. — *În cercul de centru* O, *diametrul* MA *se prelungeşte cu* $AB=R$ (*raza cercului*). *Din* B *se duce tangenta* BC *la cerc, care se prelungeşte cu* $CD=R$. *Se proiectează* D *în* E *pe* MA. *Să se arate că,*

$$\frac{S_{EDCO}}{S_{ADB}}=\frac{3}{\sqrt{3}+1}.$$

MAIOR G. P. BOERESCU

Soluţia. Problema se reduce la a calcula pe DE şi OE. În triunghiul dreptunghiu OBC, OB este diametrul cercului, iar OC raza, încât BC este latura triunghiului echilateral înscris în cerc, adică

$$BC = R\sqrt{3}.$$

Tot așa triunghiul dreptunghiu OCD are catetele egale cu raza cercului, încât ipotenuza este latura pătratului înscris, adică $OD = R\sqrt{2}$. Scriind în două moduri suprafața triunghiului ODB, obținem relația

$$(R\sqrt{3}+R)R = 2R.DE;\ DE = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{3}+1).$$

Triunghiul dreptunghiu ODE ne dă

$$OE^2 = OD^2 - DE^2 = \tfrac{1}{4}R^2(4-2\sqrt{3}) = \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{3}-1)^2;$$

$$OE = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{3}-1).$$

Suprafețele ce intră în relația din enunț sunt egale cu

$$S_{EDCO} = S_{EDO} + S_{ODC} = \tfrac{1}{2}(ED.EO + OC.CD)$$

$$= \tfrac{1}{2}R^2\left[\tfrac{1}{4}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)+1\right] = \tfrac{3}{4}R^2.$$

$$S_{ADB} = \tfrac{1}{2}AB.DE = \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{3}+1)$$

care împărțite între ele ne dau relația din enunț.

Au rezolvat problema D-ra: *Peșanca Tr. Dacia* (București) și d-nii: *Balanișcu Ch.* (Cluj), *Bălăuță M.* (Deva), *Bergman S. M.* (București), *Beșchea R.* (București), *Blaga Ov.* (Cluj), *Bogza M.* (Roman), *Cândea V.* (Satu-Mare), *Cârciu I.* (Timișoara), *Cernescu A. N.* (Predeal), *Chioreanu I.*, *Ciucescu P.* (Slatina), *Coman L.* (Timișoara). *Constantinescu P.* (Predeal), *Constantinescu G. V.*, *Corduneanu C.* (Predeal), *Crăcea I. D.* (Slatina), *Coțiu A.* (Cluj), *Crăciunescu V.* (Timișoara), *Dănescu A.* (București), *Dăscălescu I. M.* (București), *Deutsch E.* (Timișoara), *Diaconu V.* (Predeal), *Dobrișan A. A.* (Timișoara), *Enache I.* (Pitești), *Fleșeriu P. E.* (Timișoara). *Gherlan I. V.* (Beiuș), *Giurconiu M.* (Timișoara), *Guttman T.* (Timișoara), *Haret Sp. R.* (București), *Hurezeanu R* (Tg.-Jiu), *Iunger A.* (Timișoara), *Lungu A. I*, (Brebu), *Man I.*, *Măncescu N. I.* (Predeal), *Manolescu G.* (Timișoara), *Mărcuțiu P. S.* (Cluj), *Moldovan I. M.* (Timișoara), *Munteanu I.* (Predeal), *Nedelcu V.* (București), *Novac I. I.* (Brăila), *Pantea N. A.* (Beiuș), *Pisanca N. I.* (Timișoara), *Poenaru Gh.* (Timișoara), *Popa D. V.* (Timișoara), *Popescu-Salcia I. B.* (Timișoara), *Pușcașu M. S.* (Craiova), *Râmboiu N. S.* (Cluj), *Ristea Gh. Gh.* (București), *Roman I. C.* (Timișoara), *Săsărman M.* (Cluj), *Simionescu G* (Roman), *Stan P.* (Timișoara), *Stănilă D. G*, (Buzău), *Stern T.* (Timișoara), *Stoian A.* (Timișoara), *Stroescu I. Fl.* (Caracal), *Teiușan I. H.*, *Teodorescu P. P.* (București), *Tincu C. C.* (Timișoara) și *Turbuțiu Gh.* (Cluj).

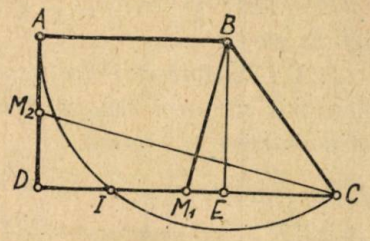
Gh. Th. Gh.

Problema 2437. — *Se consideră un trapez dreptunghic* ABCD *în care* $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^0$ *și* AB=BC. *Dacă* M_1 *este mijlocul lui* CD, *să se demonstreze că perpendiculara din* C *pe* BM_1 *trece prin mijlocul* M_2 *al lui* AD.

VIRGIL GHITESCU

Soluția. Fie E proiecția lui B pe DC. Triunghiurile CDM_2 și BEM_1 sunt asemenea având laturile perpendiculare. Din asemănarea lor scoatem,

$$\frac{DM_2}{M_1E} = \frac{DC}{BE}.$$



Punând pentru prescurtare:

AB=BC=a, AD=

BE=c și DC=b,

această relație se mai scrie

$$\frac{DM_2}{a-\frac{1}{2}b} = \frac{b}{c};\qquad DM_2 = \frac{2ab-b^2}{2c}.$$

Dar, din triunghiul BEC scoatem

$$c^2+(b-a)^2 = a^2;\quad 2ab-b^2 = c^2,$$

relație, în baza căreia, formula precedentă spune că $DM_2 = \frac{1}{2}c$.

Observări: 1º Demonstrația de mai sus presupune că M_1 este între D și E In adevăr, fie C_1 al doilea punct unde cercul de centru B și de rază a taie pe DC. Din figură se vede că $DC > C_1C$, adică $CM_1 > CE$.

2º. Dacă se ia trapezul ABC_1D demonstrația este aceiași și proprietatea se menține.

3º. Soluții geometrice dela D-nii: *Dăscălescu I. M. Gutman T.*, *Haret Sp. R*, *Lebovics E*, *Măncescu N. I.*, *Munteanu G*, *Munteanu I.*, *Novac I.*, *Ristea Gh.* și *Teodorescu P. P.*

4º. Soluții analitice dela D-nii: *Bâlă V. C.*, *Beșchea R.*, *Blaga Ov.*, *Bogza M.*, *Brașoveanu Gh*, *Crăciunescu V.*, *Dănescu Gh. Alex.*, *Deutsch E.*, *Dobrișan A*, *Fleșeru P. E.*, *Gherlan I. V.*, *Giurconiu M.*, *Iovănel Ch.*, *Marinescu S. D.*, *Manolescu G.*, *Moldovanu I. M.*, *Novac I. I*, *Stănilă D. G.*, *Szekely G*, *Tucă N.* și *Turbuțiu Gh.*

5. La această problemă simplă s'au primit *șase* soluții greșite.

Gh. Th. Gh.

Problema 2438. — *În triunghiul* BAC, *înscris în cercul* O, *fie* H *ortocentrul*, E *piciorul mediatoarei pe* AC, DL *dreapta care unește mijloacele lui* AB *și* AH. *Să se arate că figura* DOEL *este un paralelogram și să-i se calculeze suprafața în funcție de elementele triunghiului* BAC *(laturi, unghiuri, suprafață).*

CAP. GH P. BOERESCU

Soluția. Dreapta DL unind mijloacele a două laturi în triunghiul ABH este paralelă cu înălțimea BH, deci perpendiculară pe AC, adică paralelă cu mediatoarea OE. Analog, LE va fi para-

lelă cu O D. Laturile opuse fiind paralele, patrulaterul O E L D este paralelogram.

Pentru suprafață observăm că $\sphericalangle OED = 90^0 - B$ și $\sphericalangle OED = 90^0 - C$, încât

$$S_{ODLE} = 2S_{ODE} = \frac{DE^2 \cos B \cos B}{\sin A} = \frac{a^2 \cos B \cos C}{\sin A}.$$

Au găsit pentru suprafață expresia de mai sus D-nii: *Blaga Ovidiu, Coman Liviu, Crăcea I. D-tru, Deutsch Em, Fleşeriu Eug., Măncescu Ion, Nedelcu Ulpius* și *Turbuțiu Gh.*

Din cauza impreciziunei enunțului, D-nii: *Ciucescu Paul, Constantinescu Gh. Virgil, Corduneanu Const., Crăciunescu Victor, Diaconescu Vasile, Giurconiu Mihai, Haret. Sp. Radu, Munteanu Ion* și *Teodorescu P. Petre*, au găsit alte expresii ale suprafeței.

Gh. Th. Gh.

Problema 2447. — *În orice triunghiu avem,*

$$\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_a}\right)^2 = 2(\sec^2 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha),$$

α fiind unghiul asociat.

LT. C-DOR C V. COSTACHESCU

Soluție. Dacă avem un triunghiu oarecare ABC, cu laturile a, b, c, și construim un triunghiu dreptunghiu de catete $a, b+c$, atunci unghiul opus catetei a, este prin definiție unghiul asociat α. *(Trigonometria patratică*, p. 52). Din triunghiul dreptunghic astfel construit, rezultă,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b+c}. \tag{1}$$

De altă parte, din „*Trigonometria circulară*“, cunoaștem relațiile

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \quad r = \frac{s}{p},$$

de unde deducem succesiv, ținând seamă și de relația (1),

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a} = \frac{2p}{2p-2p} = \frac{b+c+a}{b+c-a} = \frac{1+\dfrac{a}{b+c}}{1+\dfrac{a}{b+c}},$$

sau,

$$\frac{r_a}{r} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}. \tag{2}$$

Dacă notăm cu E primul membru al relației din enunț și avem în vedere relația (2), putem scrie succesiv,

$$E = \left(\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)^4 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^4}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$$

$$= \frac{2+12\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}^4\alpha}{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$$

$$= 2\frac{\cos^4\alpha + 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}$$

$$= 2\frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$$

$$= 2\frac{1+\sin^2 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

sau,

$$E = 2(\sec^2 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha).$$

Relația cerută este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Balanişcu Chirică* (student, Cluj), *Bâlă C-tin* (Lic. Tg-Jiu), *Crăcea D-tru* (Lic. Slatina), *Chiriac C.* (Brăila), *Ciucescu Paul* (Slatina), *Constantinescu Virgil* (Lic. Slatina), *Corduneanu C-tin* (Predeal), *Giurconiu Mihail* (P., T) *Manolescu Gh.* (P., T), *Munteanu Ion* (Lic. Milit. Nic. Filipescu), *Novac Ioan* (P., T), *Puşcaşiu Silviu* (P., T.), *Szekely G., Târcomnicu C-tin* (Lic. Slatina), și *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București).

Problema 2449. — *Se consideră un triunghiu* ABC *și o dreaptă* Δ. *Din* A *se duce o paralelă la* BC *care taie pe* Δ *în* A′ *și fie* A_1 *simetricul lui* A′ *față de* A. *Analog se determină punctele* B_1 *și* C_1. *Să se arate că punctele* A_1, B_1, C_1 *sunt colineare.*

GH. TH. GHEORGHIU

Soluție dată de D-l Prof. *Hr. Dăscălescu* (R. Sărat).

Prin vârfurile triunghiului ABC ducem paralele respectiv la laturile opuse care taie pe Δ în A′, B′, C′ și prelungite până se intersectează două câte două formează triunghiul M N P, anticomplimentarul lui A B C. Fie A_1, B_1, C_1 simetricele lui A′, B′, C′ respectiv față de A, B, C pe laturile NP, PM, MN ale triunghiului MNP. Avem relațiile

$$\begin{aligned} &\overline{A'P} = \overline{NA_1}, \quad \overline{A'N} = \overline{PA_1}, \quad \overline{C'N} = \overline{MC_1}, \\ &\overline{C'M} = \overline{NC_1}, \quad \overline{B'M} = \overline{PB_1}, \quad \overline{B'P} = \overline{MB_1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Cum dreapta Δ este o transversală în triunghiul MNP, conform teoremei lui *Menelaus*, avem

$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'N}} \cdot \frac{\overline{C'N}}{\overline{C'M}} \cdot \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'P}} = 1. \tag{2}$$

Conform relațiilor (1), formula (2) se mai poate scrie

$$\frac{\overline{A_1N}}{\overline{A_1P}} \cdot \frac{\overline{C_1M}}{\overline{C_1N}} \cdot \frac{\overline{B_1P}}{\overline{B_1M}} = 1,$$

care conform reciprocei teoremei amintită mai sus, punctele A_1, B_1, C_1 sunt colinare.

Soluții analoage date de D-nii: *Deutsch Em.*, *Gherlan I. Vas.*, *Sergiu Eug.* și *Szekely G.*

Au dat soluții analitice D-nii: *Munteanu Giuseppe* și *Novac I. Ioan.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2452. — *În triunghiul dreptunghiu* BAC, D *este piciorul înălțimei din* A *pe* BC, *iar* E *și* F *respectiv jumătățile laturilor* AB *și* AC. *Figura* ADEF *este un patrulater înscriptibil a cărui suprafață este jumătate din cea a triunghiului* BAC.

CAP G P. BORESCU

Soluția. În triunghiu ABD, DE este mediana unghiului drept și deci egală cu jumătatea ipotenuzei, adică DE = EA; analog DF = FA. Triunghiurile AEF și EDF sunt egale, având laturile egale două câte două. Rezultă că patrulaterul ADEF este înscriptibil având două unghiuri opuse drepte. Pentru suprafață avem,

$$S_{AEDF} = 2\,S_{AEF} = AE \cdot AF = \frac{1}{4} AB \cdot AC = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Soluții date de d-ra *Petanca Tr. Dacia* și de d-nii: *Blaga Ov.* (Cluj), *Bogza M.* (Roman), *Cândea V.* (Satu-Mare), *Cernescu A. N.*, *Ciucescu P.* (Slatina), *Cocoș Gh.* (Timișoara), *Coman L.* (Timișoara), *Constantinescu P.* (Predeal), *Constantinescu V.*, *Corduneanu C.* (Predeal), *Crăciunescu V.* (Timișoara), *Deutsch Em.* (Timișoara), *Diaconu A. I.* (Timișoara), *Diaconu V.* (Predeal), Lt. *Enache I.* (Pitești), *Fleșeriu P. E.* (A. Iulia), *Gersch P.*, *Gherlan V.* (Beiuș), *Ciurconiu M.* (Timișoara), *Guttman T.* (Deva), *Haret Sp. R.* (București), *Hurezeanu R.* (Tg. Jiu), *Iunger A.*, *Lebovics E.*, *Lungu A. I.* (Brebu, Prahova), *Man Iosif* (Timișoara), *Măncescu N. I.* (Predeal), *Manolescu G.* (Timișoara), *Moldovan M.* (Beiuș), *Munteanu G.* (Brașov), *Munteanu I.* (Predeal), *Neagu M.* (Timișoara), *Nedelcu V.* (București), *Neguț A. I.* (Tg. Jiu), *Nemeth E.* (Brașov), *Novac I. I.* (Brăila), *Pali S.* (Timișoara), *Pantea N. Alex.* (Beiuș), *Popescu I. A.*, *Popescu I. B.* (Timișoara), *Podratzky V.* (Timișoara), *Pușcașiu M. S.* (Craiova), *Radu R.* (Cluj), *Rămboiu N. S.* (Cluj), *Ristea Gh. Gh.* (București), *Stancu D. D.* (Arad), *Ștefănescu I. S.* (Timișoara), *Stroescu I. Fl.* (Caracal), *Szekely G.* (Cluj), *Teiușan I. H.* (Beiuș), *Teodorescu P. P.* (București), *Tincu C. C.* (Timișoara) și *Turbuțiu Gh.* (Cluj).

D-nii *Bălă V. C.* (Tg. Jiu), *Cârciu I.* (Timișoara), *Coțiu A.* (Cluj), *Deutsch Em.* (Timișoara), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Moldovan M.* (Beiuș) și *Stănilă D. G.* (au dat soluția analitice, *Georgescu Nicolin*, *Purcea M. I.*

S'au mai primit încă trei soluții neiscălite.

Gh. Th. Gh.

Problema 2453. — *Fie* (A, B, C, D), *o diviziune armonică*

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}},$$

și J *mijlocul segmentului* CD, *iar* O *arbitrar.* Avem

$$\overline{OA}^2 \cdot \overline{BJ} - \overline{OB}^2 \cdot \overline{AJ} = \overline{OC}\ \overline{OD} \cdot \overline{BA}.$$

N. N. MIHAILEANU

Soluția. Alegând drept origină punctul J, cele patru puncte vor avea abscisele A(a), B(b), C(c), D$(-c)$ cu relația de condiție: (1) $c^2 = ab$. Fie α abscisa punctului O. Relația din enunț se traduce prin

$$(a-\alpha)^2 b - (b-\alpha)^2 a = (c-\alpha)(-c-\alpha)(b-a).$$

Această relație este o identitate în baza lui (1). În adevăr, prima parte se mai poate scrie

$$(a^2 - 2a\alpha + \alpha^2)b - (b^2 - 2b\alpha + \alpha^2)a = (b-a)(\alpha^2 - ab) = (b-a)(\alpha^2 - c^2)$$

adică tocmai partea a doua.

A rezolvat problema D-ra *Petanca Dacia* și D-nii *Ciucescu P.*, *Constantinescu G. V.*, *Corduneanu C.*, *Crăciunescu V.*, *Deutsch E.*, *Diaconu Gh. V.*, *Giurconiu M.*, *Haret Sp. R.*, *Man V. I.*, *Manolescu G.*, *Munteanu T. I.*, *Novac I. I.*, *Popa D. V.*, *Pantea N. Alex.*, *Pușcașiu M.S.*, *Stan P.*, *Stănilă D. G.*, *Teodorescu P. P.* și *Tincu C. C.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2460. — *Fie* ABC *un triunghiu dreptunghiu cu vârful unghiului drept în punctul dat* A, *având direcțiile catetelor date și fie* P *un punct fix pe ipotenuza variabilă* BC. *Notăm cu* M *și* N *mijloacele segmentelor* BC *și* CP, *iar cu* Q *punctul unde paralela dusă din* N *la* AC *taie dreapta* AM. *Să se arate că segmentul* QN *este de lungime constantă când ipotenuza* BC *se rotește în jurul punctului* P.

MARIA NEUMANN

Soluția. Prin Q ducem o paralelă la AB care taie pe BC în R. Cum triunghiurile AMC și AMB sunt isoscele, rezultă că și triunghiurile QMN și QMR sunt isoscele, adică MN = MQ = MR. Deci avem RN = 2 MN = 2 (MC − NC) = BC − PC = BP. Fie acum S proiecția lui P pe AB. Triunghiurile dreptunghice RQN și BSP sunt egale având unghiurile egale (deoarece au laturile paralele) și o latură egală Rezultă QN = PS = const, deoarece

măsoară distanța punctului fix P la dreapta fixă AB.

S'au primit soluții geometrice dela D-nii *Corduneanu C., Diaconu Gh. V., Haret Sp. R, Moldovan M., Munteanu T. I, Novac I. I., Stan P., Szekely G, Teodorescu P. P.* și *Turbuțiu Gh.*

La această problemă simplă sau mai primit încă 34 de soluții analitice. Numele acestor rezolvitori au fost publiicate pe coperta revistei.

Gh. Th. Gh.

Problema 2469. — *Fie* A *și* B *extremitățile unui diametru al unui cerc* O *și* M *un punct pe cerc. Din* A *se duce o paralelă la raza* O M *a cercului* O. *Paralela din* A *la* O M *taie latura* B M *în* C. 1°. *Să se arate că triunghiul* A B C *este isoscel.* 2°. *Fie* M *mobil pe cercul* O. *Să se afle locul geometric al vârfului* C *al triunghiului* A B C.

VALERIU M. STANCIU

Soluția 1°. În triunghiul A B C, O M este paralelă cu latura A C și trece prin mijlocul lui A B. Deci A C = 2 O M = A B, adică triunghiul A B C este isoscel. 2°. Cum A este fix și A C = 2 R, R fiind raza cercului, locul lui C va fi un cerc cu centrul în A și de rază 2 R.

Au rezolvat problema: Dra *Petanca D.*(București) și d-nii: *Blaga O.* (Cluj), *Bota I. V.* (Brad), *Cârciu I.* (Timișoara), *Ciucescu P.* (Slatina). *Constantinescu G. V.* (Slatina), *Cocoș Gh.* (T-șoara), *Corduneanu C.* (Predeal), *Coțiu A.* (Cluj), *Crăciunescu V.* (Timișoara), *Cucu I. E.* (Timișoara), *Demian T., Deutsch E.* (Timișoara), *Diaconescu A. I.* (Timișoara), *Diaconu A. I.* (Timișoara), *Diaconu V.* (Predeal), *Floșeriu P. E.* (Timișoara), *Gersch P.* (Timișoara), *Gherlan I. V.* (Beiuș), *Giurconiu M.* (Timișoara), *Guttman T.* (Timișoara), *Haret Sp. R.* (București), *Hurezeanu M. R.* (Tg. Jiu), *Lungu A. I.* (Brebu-Prahova), *Man I. O*, *Manolescu V. G.* (Timișoara), *Marinescu S. D.* (Ploiești), *Mărcuțiu P. S.* (Timișoara), *Moldovan I. M.* (Timișoara), *Moroianu D. A.* (Timișoara), *Munteanu T. I.* (Predeal), *Neagu N.* (Timișoara), *Neguț A. I.* (Tg.-Jiu), *Novac I. I.* (Timișoara), *Pali S.* (Timișoara), *Pantea N. A.* (Beiuș), *Poenaru Gh.* (Timișoara), *Podratzky V.* (Timișoara), *Pușcașiu M. S.* (Craiova), *Râmboiu N. S.* (Cluj), *Schlomiuk H. N.* (Sibiu), *Simionescu G.* (Roman), *Stan P.* (Timișoara), *Stanciu I. V. M., Stănilă D. B-G,* (Buzău), *Stancu D. D.* (Arad), *Szekely* (Cluj), *Ștefănescu O. S* (Timișoara), *Teiușan H.* (Beiuș), *Teodorescu P. P.* (București), *Tincu C. C.* (Timișoara), *Turbuțiu Gh.* (Cluj), *Țârlie I.* (Timișoara).

S'au mai primit și două soluții neiscălite.

Gh. Th. Gh.

Problema 2476. *Să se arate că,*

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1} - \operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\varphi(x)-x^2}{\varphi(x)+x^2}}{\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{x^3-1}{x^3+1} - \operatorname{arc\,tg} i\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2},$$

știind că $i = \sqrt{-1}$.

MIHAI GIURCONIU

Soluția autorului. Considerăm identitatea

$$(1)\quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} i\frac{A - e^{2if(x)}}{A + e^{2if(x)}} - \operatorname{arc\,tg} i\frac{A-1}{A+1},$$

(„R. M. T", Anul XXVI, p. 81).

Pentru,

$$f(x) = \frac{\log x}{i} \quad \text{și} \quad A = \varphi(x),$$

fiindcă A poate fi și funcție de x, identitatea (1) devine

$$\frac{\log x}{i} = \operatorname{arc\,tg} i\frac{\varphi(x) - e^{2\log x}}{\varphi(x) + e^{2\log x}} - \operatorname{arc\,tg} i\frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1},$$

sau,

$$(2)\quad \operatorname{arc\,tg} i\frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1} - \operatorname{arc\,tg} i\frac{\varphi(x)-x^2}{\varphi(x)+x^2} = -\frac{\log x}{i}.$$

Dacă tot în identitatea (1) facem

$$f(x) = i\log x^2 \quad \text{și} \quad A = \frac{1}{x},$$

obținem

$$i\log x^2 = \operatorname{arc\,tg} i\frac{\dfrac{1}{x} - e^{-2\log x^2}}{\dfrac{1}{x} + e^{-2\log x^2}} - \operatorname{arc\,tg} i\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}+1},$$

sau,

$$(3)\quad \operatorname{arc\,tg} i\frac{x^3-1}{x^3+1} - \operatorname{arc\,tg} i\frac{1-x}{1+x} = 2i\log x.$$

Împărțind relația (2) prin (3), găsim

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1} - \operatorname{arc\,tg} i\dfrac{\varphi(x)-x^2}{\varphi(x)+x^2}}{\operatorname{arc\,tg} i\dfrac{x^3-1}{x^3+1} - \operatorname{arc\,tg} i\dfrac{1-x}{1+x}} = -\frac{1}{2i^2} = \frac{1}{2},$$

adică tocmai relația cerută.

Soluția 2-a dată de d-nii: *A. Gloden* (Luxemburg) și *Haret Radu* (București), *Mâncescu Ion* (Colegiul; Predeal), *Novac Ioan* (P.T.), *Pali Sergiu* (P., T.), *Stan Petru* (P. T.) și *Teodorescu Petre* (Lic. Matei Basarab, București).

In baza identității cunoscute,

$$\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg}\frac{a-b}{1+ab}$$

și notând cu E_1 și E_2 termenii fracției din primul membru al relației cerute, putem scrie succesiv,

$$(1)\quad E_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{i\frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+1} - i\frac{\varphi(x)-x^2}{\varphi(x)+x^2}}{1-\frac{[\varphi(x)-1][\varphi(x)-x^2]}{[\varphi(x)+1][\varphi(x)+x^2]}} = \operatorname{arc\,tg} i\frac{\varphi^2(x)-\varphi(x)+x^2\varphi(x)-x^2-\varphi^2(x)-\varphi(x)+x^2\varphi(x)+x^2}{\varphi^2(x)+\varphi(x)+x^2\varphi(x)+x^2-\varphi^2(x)+\varphi(x)+x^2\varphi(x)-x^2}$$

$$= \operatorname{arc\,tg} i\frac{2\varphi(x)(x^2-1)}{2\varphi(x)(x^2+1)} = \operatorname{arc\,tg} i\frac{x^2-1}{x^2+1};$$

$$(2)\quad E_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{i\frac{x^3-1}{x^3+1} - i\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{(x^3-1)(1-x)}{(x^3+1)(1+x)}} = \operatorname{arc\,tg} i\frac{x^3-1+x^4-x-x^3-1+x^4+x}{x^3+1+x^4+x-x^3+1+x^4-x} = \operatorname{arc\,tg} i\frac{x^4-1}{x^4+1}.$$

Împărţind (1) prin (2), obţinem

$$(3)\quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\operatorname{arc\,tg} i\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\operatorname{arc\,tg} i\frac{x^4-1}{x^4+1}}.$$

Acum notăm,

$$(4)\quad \operatorname{arc\,tg} i\frac{x^2-1}{x^2+1} = u, \text{ deci } (5)\quad \operatorname{tg} u = i\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

şi în baza relaţiei (5) putem scrie

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg}^2 u} = 2\frac{i\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}} = 2\frac{i(x^2-1)(x^2+1)}{2(x^4+1)}$$

$$= i\frac{x^4-1}{x^4+1},$$

de unde

$$(6)\quad \operatorname{arc\,tg} i\frac{x^4-1}{x^4+1} = 2u.$$

Înlocuind în (3) termenii fracţiei din al 2-lea membru cu valorile lor din (4) şi (6), găsim

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{u}{2u} = \frac{1}{2},$$

care este tocmai relaţia cerută.

Alte soluţii date de d-nii: *Ciucescu Paul* (Lic. Slatina), *Târcomnicu C.* (Lic. Slatina), precum şi soluţii asemănătoare dela următorii elevi de la liceul Militar Timişoara: *Bilcea Daia, Cocoş Gh., Comşa Corneliu, Moroianu Aurel, Răuţu Petru, Stanciu Petre, Blaga Ovidiu, Cioară Gh., Alex., Constantinescu G. Virgil, Gherlan I. V., Pantea Alex., Ştefănenscu Sofronie* şi *Turbuţiu Gh.*

Problema 2480.*) — *Să se găsească formula care ne dă suma primilor n termeni ai sumei*

$$S = 9 + 79 + 779 + \cdots + 77\ldots79.$$

PETRE IONESCU

Soluţia. Al m-lea termen din sumă se poate scrie

$$77\ldots79 = 77\ldots70 + 9 = 70\,.\,11\ldots1 + 9 =$$

$$\frac{70}{9}\cdot 99\ldots9 + 9 = 70\frac{10^{m-1}-1}{9} + 9,$$

încât putem scrie succesiv

$$S = 9n + \frac{70}{9}[(10-1)+(10^2-1)+\cdots+(10^{n-1}-1)]$$

$$= 9n + \frac{70}{9}\left[10\frac{10^{n-1}-1}{9} - (n-1)\right]$$

şi după ce se fac toate calculele se găseşte îndefinitiv

$$S = \frac{7\,.\,10^{n+1} + 99n - 70}{81}.$$

Au rezolvat problema D-nii: *Bergman S. M, Cioară Gh. Alex., Gherlan I. V., Manolescu G., Moldovan I. M., Novac I. I., Pantea Alex.. Stancu D. D., Teodorescu P. P.* şi *Vişa Eug.*

D-l *Teodorescu P. P.* a calculat suma dată într'un sistem de numeraţie oarecare.

S'au mai primit încă 9 soluţii incomplecte.

Problema 2490. — *Într'o grădină sunt plante. Grădinarul vrea să le distrugă şi rupe zilnic acelaşi număr. Peste noapte însă, cele rămase se dublează ca număr mai puţin două. Câte plante au fost şi câte rupe grădinarul zilnic, ştiind că a patra zi (după ce a rupt acelaş număr ca şi în celelalte zile) plantele au fost distruse.*

MAIOR G. P. BOERESCU

Soluţia. Însemnând cu x numărul plantelor din grădină şi cu y numărul celor rupte zilnic, avem

*) Enunţ rectificat.

la sfârşitul primei zile $x-y$ plante, iar a doua zi dimineaţă $2(x-y)-2=2(x-y-1)$. În seara zilei a doua vor fi $2(x-y-1)-y=2x-3y-2$, iar în dimineaţa zilei a treia $2(x-3y-2)-2=(2x-3y-3)$ Analog, în seară zilei a treia vor fi $4x-7y-6$, iar în ziua a patra dimineaţă vor fi $2(4x-7y-6,-2=y$ conform enunţului. Ecuaţia problemei este deci

$$8x-15y-14=0,$$

care trebue rezolvată în numere întregi. În acest scop observăm că o mai putem scrie

$$x=\frac{14+15y}{8}=2+2y-\frac{2+y}{8},$$

ceiace spune că $2+y$ trebue să fie divizibil cu 8, adică: $2+y=8k$, $y=8k-2$. Inlocuind mai sus, avem soluţia generală a problemei

$$x=15k-2,\quad y=8k-2,$$

unde k ia valori întregi şi pozitive.

Au rezolvat problema, dând soluţia sub forma generală de mai sus, D-ra *Peţanca Tr. Dacia* şi D-nii: *Blaga Ov., Ciucescu Paul, Novac I. I., Pali Sergiu, Stănescu D. Const.* şi *Teodorescu P. P.* Afară de aceste soluţii s'au mai primit încă 22 soluţii particulare (pentru $k=1$).

Gh. Th. Gh.

Problema 2492. — *Fie xOy un unghiu drept, iar D_1 şi D_1' două drepte simetrice în raport cu Ox, care trec prin O. Fie A centrul unui cerc, ce trece prin punctul O şi care este tangent dreptei D_1' iar B simetricul punctului O în raport cu A. Perpendiculara dusă în B pe dreapta D_1 taie laturile unghiului drept dat în punctele C şi D. Să se arate că B este mijlocul segmentului CD.*

MARIA NEUMANN

Soluţia. Luăm C pe Ox şi D pe Oy şi fie I piciorul perpendicularei coborâtă din B pe D_1. Mai notăm pentru prescurtare $\sphericalangle xOD_1=\sphericalangle xOD_1'=\alpha$. Din construcţia indicată în problemă, B este un punct oarecare luat pe perpendiculara în O pe D_1' (A nu joacă nici un rol). Avem $\sphericalangle BOC=90^0-\alpha$ şi din triunghiul dreptunghic OIC, $\sphericalangle OCB=90^0-\alpha$ încât (1) $\sphericalangle BOC=\sphericalangle OCB$. Tot aşa $\sphericalangle BOD=\sphericalangle xOD_1=\alpha$ ca având laturile perpendiculare, iar $\sphericalangle ODC=90^0-\sphericalangle OCD=\alpha$, deci (2) $\sphericalangle BOD=\sphericalangle ODB$. Din (1) şi (2) rezultă că triunghiurile OBC şi OBD sunt isoscele, deci $BC=OB=BD$, ceiace însemnează că B este mijlocul lui CD.

A rezolvat problema D-ra: *Peţanca Tr. Dacia* şi D-nii: *Bâlă V. Const., Bota I. Val., Ciucescu Paul, Cocoş Gh., Constantinescu G. Virgil, Deutsch Em., Diaconu A. I., Giurconiu M., Hodar N. Moreno, Ioncu Simion, Man Iosif, Manolescu G., Mărcuţiu P. Sitviu, Moldovan I. Mircea, Munteanu Giuseppe, Novac I. I., Pantea N. Alex., Puşcaşiu Silviu, Ristea Gh. Gh., Tarcea I. I, Ţârcomnicu D. C, Teodorescu P. P.* şi *Turbuţiu Gh.*

La această problemă simplă s'au primit şi 9 soluţii analitice dela corespondenţi al căror nume a fost anunţat la vreme pe copertă. S'au primit şi câteva soluţii greşite.

Gh. Th. Gh.

Problema 2497. — *Cu numerile dela 645—653 să se formeze un patrat magic de trei linii şi trei coloane, astfel ca suma numerelor de pe fiecare linie, coloană şi diagonală să fie egală cu 1947.*

ILIE CONSTANTINESCU

Soluţia. În *Culegerea de Probleme de Aritmetică*, partea I, de *I. Ionescu* (ed. II-a) la cap, IV, pr. 15 se arată că cu ajutorul numerelor 1 până la 9 se poate forma pătratul magic alăturat, având suma cifrelor pe linii, diagonale şi coloane, 15. Din acest pătrat magic putem forma o infinitate adăogând un număr oarecare A tuturor numerelor din tablou De ex., adăogând 644 se obţine pătratul magic alăturat şi care este cel cerut de problemă. În adevăr făcând suma numerelor din tablou pe linii, diagonale şi coloane, vom obţine $15+3.644=1947$.

2,	9,	4
7,	5,	3
6,	1,	8

646,	653,	648
651,	649,	647
650,	645,	652

Au găsit pătratul magic cerut de problemă D-ra *Gârleşteanu M. El.* şi D-nii: *Barbul V. V., Cănescu Şt. Tr., Cârciu I., Chioreanu V. I, Cioară Gh. Alex., Ciucescu P., Cocoş Gh., Coţiu A., Gertler N. R., Gherlan V., Giurconiu M., Haruzeanu R., Iancu S., Man I., Man I. O., Manolescu G., Mărcuţiu P. S., Moldovan I. M., Munteanu G., Neguţ A. I., Nemeth E, Novac I. I., Pali S., Pantea N. Alex., Păunescu St. Gh. Pisanca N. I., Popescu A., Stan P., Stănescu D. C., Ştefănescu S., Szekely G., Tămăşescu D. V., Tarcea I, Ţârcomnicu D., Teleagă D, Teodorescu P. P.* şi *Tibăr A.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2499. — *Se dau funcţiile*

$$f(x,y)=x^3-4x^2y+bxy^2-4y^3+x^2-4y^2$$
$$\varphi(x,y)=x^2-5x^2y+5xy^2+y^2+5,$$
$$\psi(x,y)=x^4+y^4-3x^2-3y^2-xy.$$

Să se găsească adevărata valoare a expresiilor

$$u=\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)},\qquad v=\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)},\qquad w=\frac{\psi(x,y)}{f(x,y)},$$

pentru $x=2$, $y=1$ soluții ale ecuațiilor $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$.

IOAN I. NOVAC

Soluția. Expresia u este o funcțiune de două variabile. Privind aceste variabile drept coordonatele unui punct din plan, funcțiunea u va avea în fiecare punct o valoare bine determinată, afară de punctele M_0 comune curbelor $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, în cari funcțiunea u este nedeterminată. Valoarea ei în aceste puncte depinde de curba descrisă de un punct mobil M ce tinde către un punct M_0. Problema cere să se găsească această valoare când punctul M descrie curba $\psi(x,y)=0$. Analog pentru funcțiunile v și w. D-l Prof. *V. Alaci* într'un articăl publicat în această revistă, vol. IV, pag. 4, demonstrează că această valoare este egală cu

$$u_0=\left[\frac{f'_x(x,y)\,\psi'_y(x,y)-f'_y(x,y)\,\psi'_x(x,y)}{\varphi'_x(x,y)\,\psi'_y(x,y)-\varphi'_y(x,y)\,\psi'_x(x,y)}\right]_{\substack{x=2\\y=1}}$$

și analog pentru valorile v_0 și w_0. Avem succesiv

$$\begin{aligned}
&f'_x=3x^2-8xy+6y^2+2x\,; && f'_x(2,1)=6,\\
&f'_y=-4x^2+12xy-12y^2-8y; && f'_y(2.1)=-12,\\
&\varphi'_x=2x-10xy+5y^2 \;; && \varphi'_x(2,1)=-12,\\
&\varphi'_y=-5x^2+10xy+2y \;; && \varphi'_y(2,1)=2,\\
&\psi'_x=4x^3-6x-y \;; && \psi'_x(2,1)=19,\\
&\psi'_y=4y^3-6y-x \;; && \psi'_y(2,1)=-4.
\end{aligned}$$

Făcându-se înlocuirile se găsesc valorile

$$u_0=34,\quad v_0=-\frac{10}{17},\quad w_0=\frac{1}{20}.$$

Soluție dată de D-nii: *Cioca I. I., Coțiu Aurel, Deutsch Em., Fleșeriu P. Eug., Gongu D. Th., Man Iosif, Moldovan I. Mircea, Pali Sergiu, Stănilă D. George* și *Tarcea I.*

Observare. Din 34 soluții primite numai 11 au fost bune dintre cari una neiscălită. Este un rezultat trist pe care nu ne putem opri să nu-l aducem la cunoștința colaboratorilor noștri. Ii rugăm cu această ocazie să dea mai multă atenție rezolvărei și redactărei problemelor rezolvate, în ceiace privește raționamentul și calculul.

Gh. Th. Gh.

Problema 2501. — P *și* P' *fiind proiecțiile punctelor fixe* A *și* A' ($AA'=2a$) *pe dreapta variabilă* D. *Se cere:*

1°. *Locul lui* M — *mijlocul segmentului* PP' *când*

$$\overline{PP'}^2=4\,\overline{AP}\cdot\overline{A'P'}.$$

2°. *Ecuația dreptelor* D *cari împlinesc condiția dată. Din forma acestei ecuații să se deducă înfășurătoarea lor.*

AUG. COMAN

1°. *Soluție geometrică.* Din trapezul dreptunghic APA'P', M și O fiind mijlocul laturilor neparalele avem:

$$\overline{AP}+\overline{A'P'}=2\,\overline{OM}.$$

Pe de altă parte dacă Q este punctul în care paralela dusă din A' la D, taie pe AP avem:

$$\overline{AP}=\overline{AQ}+\overline{A'P'}\text{ sau}$$
$$\overline{AP}-\overline{A'P'}=\overline{AQ}$$

ridicând această ultimă relație la pătrat obținem:

$$(1)\qquad \overline{AP}^2+\overline{A'P'}^2-2\,\overline{AP}\cdot\overline{A'P'}=\overline{AQ}^2.$$

Din triunghiul dreptunghic AQA' avem:

$$\overline{AQ}^2=\overline{AA'}^2-\overline{A'Q}^2$$

sau cum $AA'=2a$,

$$\overline{AQ}^2=4a^2-\overline{A'Q}^2,$$

înlocuind-o în (1) obținem:

$$\overline{AP}^2+\overline{A'P'}^2-2\,\overline{AP}\cdot\overline{A'P'}=4a^2-\overline{A'Q}^2$$

sau

$$\overline{AP}^2+\overline{A'P'}^2-2\,\overline{AP}\cdot\overline{A'P'}=4a^2-\overline{PP'}^2$$

și ținând seamă de relația de condiție din enunț:

$$\overline{AP}^2+\overline{A'P'}^2-2\,\overline{AP}\cdot\overline{A'P'}=4a^2-4\,\overline{AP}\cdot\overline{A'P'}$$

de unde:

$$(AP+A'P')^2=4a^2$$

sau

$$\overline{AP}+\overline{A'P'}=2a\text{ adică }2\,\overline{OM}=2a$$
$$\therefore\qquad \overline{OM}=2a=\text{C-tă}.$$

Locul lui M este deci cercul cu centrul în O — mijlocul lui AA' și de rază $\frac{1}{2}AA'=a$.

Soluție analitică. Fie dreapta

$$(D)\equiv y=mx+n.$$

Luăm AA' ca axa Ox, și perpendiculara pe mijlocul ei — O — ca axa Oy. Cum $\overline{AA'}$, $2a$ rezultă ec. dreptelor:

$$(AP)\equiv y=-\tfrac{1}{m}(x-a).$$
$$(A'P')\equiv y=-\tfrac{1}{m}(x+a).$$

Obținem pentru

$$P\left(\frac{a-mn}{1+m^2}, \frac{am+u}{1+m^2}\right)$$

iar pentru

$$P'\left(-\frac{a+mn}{1+m^2}, \frac{n-am}{1+m^2}\right).$$

Rezultă că M are ca coordonate:

$$(2) \qquad x=-\frac{mn}{1+m^2} \qquad y=\frac{n}{1+m^2}.$$

Relația de condiție devine, observând că, în baza ei AP și A'P' sunt, neapărat, de același sens:

$$(3) \qquad a_2=n^2-a^2m^2.$$

Ec. locului geometric se obține eliminând pe m și n între relațiile (2) și (3), obținem:

$$x^2+y^2=a^2$$

adică cercul de diametru $\overline{AA'}$.

2° Pentru a obține ecuația dreptelor $(D)\equiv y=mx+n$ indeplinind condiția din enunț, am văzut din soluția analitică că dintre m și n există relația:

$$a^2=n^2-a^2m^2$$

$$\therefore \qquad n=+a\sqrt{1+m^2}.$$

Deci ec. dreptelor (D) ecte:

$$(4) \qquad y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}.$$

Se recunoaște în ecuația (4) ecuație tangentelor de pantă m la cercul:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Rezultă că înfășurătoarea dreptelor (3) este același cerc ca și locul lui M mijlocul lui PP'.

Soluția analitică foarte bună dată de D-l Prof. *Hr. Dăscălescu* (R. Sărat) și *D. Teleagă* (Timișoara). Soluție geometrică parțială dată de D-l *P. P. Teodorescu* (București).

Gh. Th. Gh.

Problema 2505. — *Să se stabilească formula care permite aflarea sumei a n termeni din șirul*

$$3+8+15+24+\cdots$$

MIRCEA MOLDOVAN

Soluția. Problema cere să se calculeze suma

$$S=1(1+2)+2(2+2)+3(3+2)+\cdots$$

$$+n(n+2)=\sum_{p=1}^{n}p(p+2).$$

Ținând seamă de proprietățile simbolului Σ, avem succesiv

$$S=\sum_{p=1}^{n}p(p+2)=\sum_{p=1}^{n}(p^2)+(2p)=\sum_{p=1}^{n}p^2+2\sum_{p=1}^{n}p$$

$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7).$$

Au rezolvat problema D-ra: *Alexa M.*, (Timișoara) și D-nii: *Cioara Gh. A.* (Beiuș), *Cioca I. I.* (Timișoara), *Ciucescu P.* (Slatina), *Cocoș Gh.* (Timișoara), *Dăscălescu Hr.* (R.-Sărat), *Deutsch E.* (Timișoara), *Gherlan I. V.* (Beiuș), *Novac I. I.* (Timișoara), *Pali S.* (Timișoara), *Pantea N.A.* (Beiuș), *Pisanca N. I.* (Timișoara), *Popa Pavel* (Oradea), *Râmboiu N. S.* (Cluj), *Seracin E.* (Timișoara), *Simeon L.* (Timișoara), *Stancu D. D.* (Arad), *Székely G.* (Timișoara), *Teodorescu P. P.* (București) și *Toderașc I. V.* (Timișoara).

D-l *Teodorescu P. P.* rezolvă problema mai generală: *Să se găsească suma șirului*

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n.$$

între termenii căruia avem relația $\alpha_{i+1}=\alpha_i+a_i$ *unde* a_i *sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de rația r.* Găsește că suma acestui șir este dată de formula

$$\tfrac{1}{6}n[2(2\alpha_1+\alpha_n)+(n-1)a_1].$$

S'au primit multe soluții greșite.

Gh. Th. Gh.

Problema 2506. — *Să se rezolve ecuația*

$$x^8-16x^6+79x^4-120x^2+9=0,$$

și să i se exprime apoi rădăcinile sub forma cea mai simplă.

EUGEN VISA

Soluție dată de D-l Ing. *Marinescu S. Dumitru* (Ploești).

Ecuația din enunț se poate scrie sub forma

$$x^4(x^2-8)^2+15x^2(x^2-8)+9=0$$

care este o ecuație de gr. II în $x^2(x^2-8)$ Rezolvată în raport cu această necunoscută ne dă

$$2x^4-16x^2+(15\pm\sqrt{189})=0.$$

Rezolvând din nou această ecuație în raport cu x^2, căpătăm

$$x^2=\frac{8\pm\sqrt{34\pm2\sqrt{189}}}{2},$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{8\pm\sqrt{34\pm2\sqrt{189}}}}{\sqrt{2}}.$$

Rezultatul obținut este de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B \pm \sqrt{C}}}$. Pentru a-l scrie sub forma cea mai simplă, vom folosi rezultatele obținute de autor în această direcție, publicate în R. M. T., vol. XXI, pag. 113. Cu ajutorul notațiilor din articolul citat, vom avea $A = 8$, $B = 34$, $C = 4 \cdot 189 = 756$; ecuația în λ este

$$\lambda^4 - 30\lambda^2 + 189 = 0$$

care are singura soluție rațională pozitivă $\lambda = 3$. Avem mai departe: $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{11}{2}$, $z = \frac{21}{4}$ încât putem scrie

$$\sqrt{8 + \sqrt{34 + 2\sqrt{189}}} = \left(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{11 - \sqrt{21}}\right)/\sqrt{2}.$$

Ținând seamă de condiția cunoscută pentruca radicali din dreapta să se transforme în radicali simpli (îndeplinită în ambele cazuri), avem mai departe

$$\sqrt{8 + \sqrt{34 + 2\sqrt{189}}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{21} - 1).$$

În baza acestei egalități și a celor ce se deduc din ea prin permutarea semnelor, ecuația dată va avea drept rădăcini numerele

$$x_{1,2} = \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(-1 + \sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{21}),$$
$$x_{3,4} = \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1 - \sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{21}),$$
$$x_{5,6} = \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3} - \sqrt{7} + \sqrt{21}),$$
$$x_{7,8} = \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{21}).$$

Soluții parțiale dela d-nii: *Cioară Gh. Alex.*, *Cocoș Gh.*, *Gherlan I. V.*, *Iovănel Ch.*, *Neguț A. I.*, *Novac I. I*, *Pali S.*, *Pisanca N. I.*, *Purcea M. I*, *Stancu D. D.* și *Teodorescu P. P.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2508. — *Fie* AB, CD *două coarde într'un cerc*; *o paralelă la* AB *taie pe* BC, AD *în* E *și* F. *Să se arate că punctele* C, E, D, F *sunt pe un același cerc.*

N. N MIHAILEANU

Soluția. Fie M și N punctele unde EF taie cercul (presupunem pe M între A și C, iar N între B și D). Avem: $\sphericalangle MEC = \frac{1}{2}(\text{arc } CM + \text{arc } BN) = \frac{1}{2}(\text{arc } CM + \text{arc } MA) = \frac{1}{2}\text{arc } AC = \sphericalangle ADC$, adică patrulaterul CDFE este înscriptibil. Am folosit mai sus egalitatea arc MA = arc BN care are loc ținând seama că două drepte paralele interceptează pe un cerc arce egale.

Observare. Figura poate avea mai multe aspecte, după cum M și N sunt pe arcul AB, M între A și C, iar N între B și D, sau între C și D, sau M și N pe arcul CD, în ipoteza că AB, CD se întâlnesc în afara cercului. Avem alte cazuri când se întâlnesc în interiorul cercului. Demonstrația este dată într'unul din aceste cazuri. Cititorul va face un exercițiu interesant, dacă va căuta să adapteze demonstrația la celelalte cazuri de figură.

Singurul rezolvitor care a examinat toate cazurile posibile a fost D-l *Teodorescu P. P.*, (București). Au dat soluții parțiale D-nii: *Bâlă V. C.* (Timișoara), *Barbul V. V.* (Oradea), *Blaga O.* (Cluj), *Cândea V.* (Satu Mare), *Cioară Gh. A.* (Beiuș), *Ciucescu P.* (Slatina), *Cărciu I.* (Timișoara), *Chioreanu V. I*, *Cioca I. I.* (Timișoara), *Cocoș Gh.* (Timișoara), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *De Sabata I.* (Beiuș), *Deutsch E.* (Timișoara), *Fleșeriu P. E.* (Timișoara), *Gherlan V.* (Beiuș), *Giurconiu M.* (Timișoara), *Gongu Th.* (Timișoara), *Hurezeanu M. R.* (Tg.-Jiu). *Man I.*, *Moldovan I. M*, (Timișoara), *Mordanu D. A* (Timișoara), *Moreno H* (Timișoara), *Munteanu G.* (Brașov), *Neguț A. I.* (Tg.-Iiu), *Nemoianu C.* (Timișoara), *Novac I. I* (Timișoara), *Pantea N*, *A.* (Beiuș), *Popa Pavel* (Oradea), *Purcea M. I.* (Caracal), *Ristea Gh. Gh.* (București), *Seracim E.* (Timișoara), *Stancu D. D.* (Arad), *Teleagă D*, *Toderașcu I. V.* (Timișoara), *Turbuțiu Gh.* (Cluj), *Zbarcea I.* (Timișoara), *Zelinger N.* (Timișoara).

Problema 2509. — *În triunghiul* BAC *dreptunghic în* A *și înscris în cercul* O *se duce înălțimea* AD *și apoi bisectoarele* DE *și* DF *ale unghiurilor* ADB *și* ADC. *Să se arate că avem*

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4(\overline{DO} \cdot \overline{OB} + \overline{BD} \cdot \overline{OC}),$$
$$\overline{DE} + \overline{DF} = \sqrt{2}\,\overline{AD}.$$

MAIOR G. P. BOERESCU

Soluție. O este mijlocul lui BC, încât

$$AB^2 + AC^2 = 4\overline{OB}(\overline{DO} + \overline{BD}) = 4OB^2 = BC^2$$

care nu este altă decât relația lui *Pitagora*.

Pe de altă parte, din triunghiul ADF scoatem

$$\frac{DE}{\sin BAD} = \frac{AD}{\sin AED}; \quad DE = \frac{AD \sin C}{\sin(C + 45^0)}$$

și prin analogie,

$$DF = \frac{AD \sin B}{\sin(B + 45^0)},$$

și cum: $B + 45^0 = 135^0 - C = 180^0 - (C + 45^0)$ avem mai departe,

$$DF = \frac{AD \cos C}{\sin(C + 45^0)}.$$

În baza acestor formule, prima parte a celei de-a doua formule din enunț, devine

$$\frac{AD(\sin C+\cos C)}{\sin(C+45^0)}=\frac{AD(\sin C+\cos C)}{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin C+\cos C)}=\sqrt{2}\,AD.$$

Au rezolvat problema D-nii: *Barbul V. V.* (Oradea), *Blaga O.* (Cluj), *Cioara Gh. Alex.* (Beiuș), *Cocoș Gh.* (Timișoara), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Coțiu A.* (Cluj), *De Sabota I.* (Beiuș), *Deutsch Em.* (Timișoara), *Gherlan I. V,* (Beiuș), *Giurconiu M.* (Timișoara), *Man Iosif, Moldovan I. Mircea* (Timișoara), *Moroianu D. Aurel* (Timișoara), *Novac I. I.* (Timișoara), *Pali Sergiu* (Timișoara), *Pantea N. Alex.* (Beiuș), *Stancu D. D.* (Arad), *Stănilă D. G.* (Buzău), *Teleagă D.* (Timișoara), *Teodorescu P. P.* (București) și *Turbuțiu Gh.* (Cluj).

Notă. Prima relație din enunț nu este valabilă decât dacă considerăm segmentele D O și B D ca *orientate;* altfel trebue presupus B > C. Niciunnl din corespondenți n'a făcut această observare.

In ultimul timp au mai venit și soluții dela D-nii: *Cândea* (Satu Mare), *Cioca I. I.* (Timișoara), *Deutsch E.* (Timișoara), *Nemoianu C.* (Timișoara), *Popa Pavel* (Oradea), *Simeon L.* (Timișoara), *Szekely G.* (Timișoara).

Gh. Th. Gh.

Problema 2512. — *Să se găsească pătratul perfect de cinci cifre distincte, căruia suprimându-i ultima cifră ne dă un alt pătrat, a cărui rădăcină pătrată este un număr prim mai mic ca 60.*

MIHAI GIURCONIU

Soluția Pătratul de patru cifre trebuie să aibă rădăcina pătrată un număr prim cuprins între 31 și 60, adică nu poate fi decât unul din numerele: 37, 41, 43, 47, 53, 59, a căror pătrate sunt numerele: 1369, 1681, 1849, 2209, 2809, 3481, Ținând seamă de grupele de două cifre care pot fi terminațiile unui pătrat perfect se constată că singura cifră ce putem adăoga la sfârșitul acestor numere spre a căpăta un nou pătrat, este 6. Cum noul pătrat trebue să aibă cifrele distincte, nu poate fi decât unul din numerele: 18496, 28096, 34816. Dintre acestea singurul pătrat perfect este

$$18496=136^2.$$

A rezolvat problema D-ra *Gârleșteanu M. El.* și D-nii: *Bâla V. Const., Cânescu Șt. Tr., Cârciu I., Cioară Gh Alex., Ciucescu Paul, Constantinescu I. Gh., Constantinescu Virgil, Georgescu Nicolin, Gertler N. Richard, Gherlan I. Vas., Hurezeanu M. Romulus, Man Iosif, Marinescu S. D., Morega V. Titus, Munteanu Giuseppe, Neguț A. I., Novac I. I, Pantea N. Alex., Păsărin Gr. Gh Pisanca N. D. Purcea M. I., Ristea Gh. Gh. Stancu D. D, Stănescu P. Const., Szekely G., Tămășescu D. Virgil, Teodorescu I. P., Toderașc I. Vas.,* și *Zelingher N.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2513. — *Să se transforma expresia*

$$E=\sqrt{3+\sqrt{1+2\sqrt{7}}},$$

într'o sumă de două iraționale de forma

$$\sqrt{x+\sqrt{z}}+\sqrt{y-\sqrt{z}}.$$

EUGEN VISA

Soluția. Folosim notațiile din articolul autorului publicat în R. M. T., vol. XXI, pag. 113. Punând A=3, B=1, C=4.7=28, ecuația în λ este

$$\lambda^4-8\lambda^2+7=0,$$

care are singura rădăcină rațională pozitivă, $\lambda=1$. Rezultă

$$x=1,\quad y=2,\quad z=\frac{7}{4},$$

încât

$$E=\frac{(\sqrt{2+\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}})}{\sqrt{2}}.$$

Soluții date de D-nii: *Cioară Gh. Alex.* (Beiuș), *Ciucescu P.* (Slatina), *Constantinescu I. Gh.* (Slatina), *Deutsch E* (Timișoara), *Gherlan I. V.* (Beiuș), *Giurconiu M.* (Timișoara), *Gonga Th.* (Timișoara), *Hurezeanu R.* (Tg. Jiu), *Iancu S.* (Timișoara), *Mărcuțiu P. S.* (Timișoara), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Moldovan I. M.* (Timișoara), *Neguț A. I.* (Tg. Jiu), *Novac I I.* (Timișoara), *Pantea N. Alex.* (Beiuș), *Pisanca N. I.* (Timișoara), *Purcea I.* (Caracal), *Ristee Gh Gh.* (București), *Simeon L.* (Timișoara). *Stanciu D. D* (Arad), *Teodorescu P. P.* (București), *Toderașc I. V.* (Timișoara), *Zbarcea L.* (Timișoara) și *Zelinger N.* (Timișoara).

Gh. Th. Gh.

Problema 2550. — *În triunghiul oarecare* BAC, *înscris în cercul* O, *bisectoarea* C E *întâlnește cercul în punctul* D. *Fie* S, *a, b, c respectiv suprafața și laturile triunghiului* B A C *iar s suprafața patrulaterului* B D A O. *Să se arate că*

$$s=\frac{abc^2}{8S}.$$

MAIOR G. P. BOERESCU

Soluția. Fie F punctul unde O D taie pe A B Cum D este mijlocul arcului A B, O D va fi perpendiculară pe A B, încât putem scrie

$$s=\tfrac{1}{2}AB.OF+\tfrac{1}{2}AB.FD=\tfrac{1}{2}AB.OD=\tfrac{1}{2}cR,$$

și cum se cunoaște formula $4RS=abc$, rezultă imediat relația din enunț.

A rezolvat problema D-ra *Crăciun Silvia* şi D-nii: *Cioara Gh. Alex., Cioca I. I., Ciucescu P., Dăscălescu Hr., Deutsch Em., Gherlan I. V, Man I., Munteanu G, Novac I. I., Pantea N. Alex., Stancu D. D., Szekely G., Teodorescu P. P.* şi *Zelingher N.*

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2579. — În anul $abcd$, luna d ziua ab, un grup de n binevoitori au subscris pentru fondul „R. M. T.“ o sumă de bani.

Care este data subscrierii şi numărul celor care au subscris, ştiind că,

$$abcd - aa = (cc)^2, \text{ iar } n^2 = ede.$$

C. D. STANESCU

2580. — Să se rezolve şi discute ecuaţia,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8x} - \frac{169}{24(3x+8)} = \frac{1}{\alpha},$$

unde α este un parametru variabil

GH TH. GHEORGHIU

2581. — Să se afle maximul sau minimul funcţiei

$$u = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

ştiind că variabilele x, y, z satisfac relaţiile de legătură,

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}.$$

Interpretare geometrică.

EUGEN VISA

2582. — În triunghiul dreptunghic BAC, fie D piciorul perpendicularei din A şi K punctul lui *Lemoine*. Prin punctul K se duc paralele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 respectiv laturilor AB, BC, CA.

Să se arate că,

$$\frac{BB_1}{B_1D} + \frac{DB_3}{B_3C} + \frac{AA_2}{A_2D} + \frac{AB_2}{DB_2} = 4.$$

MAIOR G P. BOERESCU

2583. — Se consideră un patrat variabil circumscris unui cerc fix şi un punct fix A. Punctul A se proectează ortogonal pe două laturi opuse ale patratului în M, N, iar pe celelalte două laturi opuse în P, Q.

1°. Să se arate că suma

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} + \overline{AP} \cdot \overline{AO},$$

păstrează o valoare constantă. (Produsele vor fi considerate algebric).

2°. Dacă în locul patratului de mai sus se ia un dreptunghiu variabil înscris în cerc, apoi facem aceleaşi construcţii, respectând aceleaşi notaţii, suma corespunzătoare,

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} + \overline{AP} \cdot \overline{AQ},$$

păstrează de asemeni o valoare constantă.

Care este valoarea acestei constante, când puncul A se află pe cerc?

Consecinţe.

3°. Să se extindă relaţiile precedente în spaţiu, considerând în loc de cerc o sferă şi în loc de patrat sau dreptunghiu, un cub, sau un paraleliped dreptunghic.

CEZAR COSNITA

2584. — Să se rezolve ecuaţia,

$$\sin x = \operatorname{arc\,tg} x.$$

G-L GH BUICLIU

2585. — Să se rezolve ecuaţia

$$sp\, x + \sin x = 2\, sp\, x \sin x.$$

V. ALACI

2586. — Fiind date două poligoane, plane sau strâmbe, $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$, unesc vârfurile primului cu vârfurile celuilalt, acestea din urmă fiind luate într'o ordine absolut arbitrară.

Pe segmentele astfel obţinute, se iau punctele $C_1, C_2, \ldots, C_n$, care le împart în acelaşi raport k, măsurând dela vârfurile primului poligon. Se obţine astfel un poligon P_i. Se repetă construcţia, luând vârfurile celui de-al doilea poligon în toate modurile posibile, obţinând astfel $n!$ poligoane P_i. Toate aceste poligoane au acelaş centru de greutate situat pe dreapta care uneşte centrele de greutate ale celor două poligoane date şi pe care o împarte în acelaş raport k.

M. GHERMANESCU

TABLOU

de candidaţii reuşiţi la examenul de admitere din 10 — 12 Octomvrie 1947.

FACULTATEA DE MINE ŞI METALURGIE

POLITEHNICA TIMIŞOARA.

1. **Sârbu N. Ioan** Lic. Militar Nic. Filipescu, Predeal.
2. **Dierdiev St. Olga** Lic. Carmen Sylva, Timişoara.
3. **Crăciun N. Nicolae** Lic. Industrial, Arad.
4. **Păslaru A. Anton** Lic. Dinicu Golescu, Câmpulung Muscel.
5. **Ionescu M. Alex. Stelian** Lic. D. B. Ştirbey, Câmpina.
6. **Hirsch H. Beno** Lic. Evreesc de Băieţi, Goleşti.
7. **Popescu I. Gheorghe** Lic. Tudor Vladimirescu, Tg.-Jiu.
8. **Gârbacea D. Cantemir** Lic. Teoretic No. 2, Cluj.
9. **Filip Gh. Gheorghe** Lic. Militar Reg. Ferdinnad I, Craiova.
10. **Tudor C. Marin** Lic. Fraţti Buzeşti, Craiova.
11. **Tanga L. Tatiana** Lic. Carmen Sylva, Timişoara.
12. **Breaz N. Eugen** Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
13. **Badea St. Traian** Colegiul C. D. Loga, Timişoara.
14. **Peptea P. Gheorghe** Lic. Radu Negru, Făgăraş.
15. **Tutuianu N. Silviu Eugen** Lic. Mircea cel Bătrân, Constanţa.
16. **Hegea T. Ioan** Lic. Teoretic, Piatra Neamţ.
17. **Burlea Eugenia** Lic. Iuliu Haşdeu, Lugoj.
18. **Mătuleţu T. Ioan** Lic. Industrial Ferdinand I, Craiova.
19. **Penescu Mircea** Lic. I. C. Brătianu, Piteşti.
20. **Bădescu St. Iulian** Colegiul Carol I, Craiova.
21. **Niţescu I. Liviu** Lic. Radu Greceanu, Slatina.
22. **Franciscovici Oscar** Lic. Industrial, Timişoara.
23. **Cusma L. Gheorghe** Lic. Traian Doda, Caransebeş.
24. **Scripăţ N. Gh. Vasile** Lic. Ştirbey Vodă, Călăraş.
25. **Crosu V. Adrian** Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
26. **Gheorghe St. Eduard** Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
27. **Lăzărescu A. Ioan** Lic. M lit. Gh. Makorovici, Iaşi.
28. **Grama St. Cornel** Lic. de Băeţi Petroşani.
29. **Ionescu N. Ioan** Lic. I. C. Brătianu, Piteşti.
30. **Lăzăreanu V. Augustin** Lic. Industrial, Braşov.
31. **Rădulescu P. Lucian** Lic. Tudor Vladimirescu, Tg.-J'u.
32. **Hristu G. Constantin** Lic. Vasile Alexandri, Goleşti.
33. **Coifan I. Virgil** Lic. Traian, Turnu-Sever'n.
34. **David Israil** Lic. Comunităţii Evreilor, Galaţi.
35. **Dimitr'u N. Petre** Lic. Fraţii Buzeşti Craiova.
36. **Cristea V. Ioan Benone** Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
37. **Catilina V. Romulus** Lic. Gh. Lazăr, Sibiu.
38. **Iancu N. Georgel** Lic. de Băeţi Codreanu, Bârlad.
39. **Corăbianu C. Gavril** Lic. Gh. Bariţiu, Cluj.
40. **Brânzei D. David** Lic. Traian Doda, Caransebeş.
41. **C'oca I. Ioan** Lic. Samuil Vulcan, Beiuş.
42. **Tudor A. Gh.** Lic. Alex. Papiu Ilarian, Tg.-Mureş.
43. **Balahan I. Ştefan** Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila, Mediaş.
44. **Cardoş L. Viorel Laurian** Lic. de Aplicaţie al Seminarului Ped. Universit., Cluj.
45. **Ogârlaci N. Vasile** Colegiul C. D. Loga, Timişoara.
47. **Atanasescu A. Vasile** Lic. I. C. Brătianu, Piteşti.
48. **Bălean Octavian** Lic. Industrial de Stat, Reşiţa.
49. **Velnicerîu S. Adrian** Colegiul C. D. Loga, Timişoara.
50. **Nica N. Alexandru** Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
51. **Hartia V. Mihai** Lic. Nicolae Bălcescu, Brăila.
52. **Predescu N. Petre** Lic. S-ţii Petre şi Pavel, Ploeşti.
53. **Ene M. Nicolae** Lic. Traian, Turnu-Severin.
54. **Buracu C. Alexandru** Lic. Radu Negru, Făgăraş.
55. **Berindei V. Corneliu** Lic. T. Vladimirescu, Tg.-Jiu.
56. **Budău Nicolae** Lic. Industrial Aurel Vlaicu, Arad.
57. **Zaharia N. Dan Eugen** Lic. N. Bălcescu, Brăila.
58. **Boînărencu C. Alexandru** Colegiul Naţional Carol I, Craiova.
59. **Cristea G. Gavril** Lic. Coriolan Brediceanu, Lugoj.
60. **Nichita P. Pantelimon** Lic. T. Doda, Caransebeş.
61. **Breabăn P. Radu** Lic. B. P. Haşdeu, Buzău.
62. **Covacovici Vladimir** Lic. Moise Nicoară, Arad.
63. **Marcus P. Leo** Lic. Evreesc de Băieţi, Galaţi.
64. **Predoiu I. Ioan** Lic. I. C. Brătianu, Piteşti.
65. **Simescu V. Ştefan** Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova.
66. **Turcanu T. Boris** Lic. Coriolan Brediceanu, Lugoj.
67. **Bărbulescu P. Victor** Lic. Industrial Regele Ferdinand I, Craiova.
68. **Diaconescu A. Anton** Şcoala Tehnică Aeronautică, Mediaş.
69. **Moşoiu D. Gheorghe** Lic. Andrei Şaguna, Braşov.
70. **Barna Gheorghe** Lic. Mihai Viteazul, Alba Iulia.
71. **Zamfirescu Alexandru** Lic. Moise Nicoară, Arad.
72. **Cornea D. Ioan** Lic. Teoretic de Băeţi, Galaţi.
73. **Mihăilă Ioan** Şcoala Tehnică Aeronautică, Mediaş.
74. **Roşca Nicolae** Lic. Sfţii Petru şi Pavel, Ploeşti.
75. **Buligan Constantin** Colegiul Naţional C. D. Loga, Timişoara.
76. **Crişţiu Mircea** Lic. Andrei Şaguna, Braşov.
77. **Grigorescu Onerel** Lic. Andrei Şaguna, Braşov.
78. **Negrea Fl. Petre** Lic. Traian, Turnu-Severin.
79. **Popovici Alexandru** Lic. Industrial, Timişoara
80. **Metineu Emanuel** Lic. Eudoxiu Humuzachi, Rădăuţi
81. **Podratzky Robert** Lic. Lenau, Timişoara.
82. **Teodorescu Gheorghe** Şcoala Tehnică Aeronautică,
83. **Totu Teodor** Lic Emanuil Gojdu, Oradea.
84. **Fodor Laurenţiu** Lic. Petru Maior, Gherla.
85. **Păsculescu T. Mihai** Lic. Petru Maior, Gherla.
86. **Văzdăuţeanu Vasile** Colegiul Naţional C. D. Loga. Timişoara.
87. **Rusu T. Ştefan** Lic. Industrial, Timişoara.
88. **Suciu I. Petre** Lic. Moise Nicoară, Arad.

89. **Dodocioiu C. Marin** Lic. Industrial Regele Ferdinand I, Craiova.
90. **Avram Tr. Nicolae** Lic. Nicolae Iorga, Ploieşti.
91. **David Nicolae** Lic. Avram Iancu, Brad.
92. **Gruescu Gheorghe** Colegiul Naţional C. D. Loga, Timişoara.
93. **Popa I. Ioan** Lic. Codreanu, Bârlad.
94. **Bătăcui Cornel** Lic. Sf. Vasile cel Mare, Blaj.
95. **Ionete Ioan** Lic. Militar Industrial, Bucureşti.
96. **Grigore Marin Bonone** L'c. B. P. Haşdeu, Buzău.
97. **Angelescu Mihai** Lic. Nicolae Iorga, Ploieşti.
98. **Bolovan Gheorghe** Lic. Enăchiţă Văcărescu, Târgovişte.
99. **Gergely Ştefan** Lic. Andrei Şaguna, Braşov.
101. **Toma Gheorghe** Lic. de Băeţi No. 2, Cluj.
100. **Ursu Gheorghe** Lic. Industrial, Braşov.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Alexa M. (2498, 2518, 2524, 2552, 2564, 2565, 2566, 2568); *Bota Valentin* (2549, 2550, 2554. 2555, 2560, 2565, 2566); *Cioara Gh. A.* (1678, 1686, 1687, 1964, 2015, 2532, 2544, 2559, 2564, 2566, 2568, 2571, 2572, 2574), *Cioca I. I.* (2516, 2523, 2530. 2531, 2565, 2566, 2571), *Crăciun S.* (2538, 2539, 2543, 2544, 2546, 2548, 2549), *Deutsch Emeric* (1494, 1530, 1559, 1687, 1832, 1877, 2095, 2118, 2287, 2325, 2373, 2392, 2416, 2160, 2476, 2486, 2487, 2504, 2523, 2531, 2544, 2552, 2568, 2571, *Dumitru Rada* (2497, 2521), *Erdélyi I.* (2565, 2566), *Funt C.* (2555, 2564, 2565, 2568), *Gherlan I. V.* (1676, 1678, 1679, 1685, 1686, 1687, 1708, 1726, 1940, 1964, 2015, 2234, 2287, 2293, 2301, 2302, 2303, 2549, 2568, 2571, 2572, 2274), *Ghiriş I* (2566), *Giurconiu Mihai* (P; 2537, 2554, 2255, 2559, 2565, 2566, *Gloden A.* (N); *Man Iosif* (P); *Mărcuţiu Silviu* (2052, 2383, 2436, 2459), *Naghiu Iosif* (A), *Neacşu O.* (P., 2526), *Neguţ Ion* (P; 2387, 2427, 2471, 2493, 2505, 2549, 2550, 2551, 2552, 2557, 2560, 2572, 2574), *Novac Ioan* (1571, 1640, 2559, 2564, 2565, 2566, 2568, 2570, 2571, 2574, 2575, 2576, 2577), *Păsăriu Gheorghe* (2530, 2549, 2564, 2574), *Păunescu Gheorghe* (2505, 2509, 2513, 2531, 2564, 2565), *Pisanca Ionel* (P; 2531, 2564, 2555, 2565, 2571), *Purcea Ion* (1965, 2230, 2233, 2234, 2518, 2529, 2549, 2550, 2551, 2555), *De Sabota Ion* (2477, 2493, 2497, 2516, 2517, 2530, 2545, 2565), *Seracin E.* (2498, 2502, 2510, 2549, 2564, 2565), *Schächter Edu* (2550, 2552), *Scondăcescu Mlrcea* (2497, 2505 2571), *Székely G.* (2498, 2523, 2551, 2522, 2566, 2568), *Stănescu D. C.* (2362, 2456, 2537, 2555), *Suta Mihai* (P; 2497, 2512, 2537, 2555), *Simeon L.* (2498, 2502, 2510, 2524, 2531, 2532, 2564, 2566, 2568, 2571, 2572, 2574), *Tibăr Aurel* (P; 2499, 2505, 2571), *Turbuţiu Gheorghe* (P; 2493, 2497, 2499, 2505, 2512, 2519, 2523, 2535, 2549, 2550, 2551, 2552, 2554, 2555, 2560, 2564, 2565, 2566, 2568), *Ţintaşiu Emanoil* (2497, 2521, 2522), *Zelingher N.* (P; 2493, 2502, 2510, 2552, 2565, 2571, 2572).

INFORMAŢII

Cursul de

ANALIZĂ INFINITEZIMALĂ

de Prof. *V. Alaci,* este sub tipar. A apărut până în prezent: *Calculul Diferenţial.* Preţul volumului apărut este de 350 lei, la care se adaogă cheltuielile de expediţie pentru acei din alte localităţi. A se adresa D-lui editor, L-t. C-dor av. *Iacob Lazăr* librăria studenţească, strada Napoleon 2, Timişoara I.

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol, trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, şi nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a doua oară nu o mai putem expedia, Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va relua aceste numere.

5. *Man I. Oct.* (Sălaj). Vă rog să vă conformaţi anunţului precedent, deoarece no. 10 ne-a venit înapoi din cauza „lipsei din localitate".

6. *Gheorghe I. Gheorghe* (lic. M. Viteazul, Bucureşti). Ne scrieţi că ne-aţi trimis 150 lei pentru abonament. Noi nu am primit nimic.

7. *Zugrăvescu C. Dorel.* Aţi trimes pentru abonament cu 110 lei mai mult. Ce să vă trimitem de aceşti bani? Poate vreţi să-i păstrăm în contul abonamentului pentru anul viitor.

8. *Stănilă D. G-B.* Din numerele care ne întrebaţi nu avem decât no. 1, vol. XXIII. Preţul este anunţat pe pagina a doua a copertei.

9. *Pantea Alex.* Vi s'a trimes no. 10, În numărul viitor vă vom anunţa dacă vă putem trimite alt exemplar. Prospectele nu se tipăresc decât în toamnă.

ANUL XXVII. FEBRUARIE 1948 No. 12.

lipsa 5-10 1-12
C10 8.104 1942-1948

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODA PE LUNA
PREȚUL ABONAMENTULUI ESTE 300 LEI ANUAL PENTRU ARTICULARI
ȘI 600 LEI PENTRU INSTITUȚII
PREȚUL ABONAMENTULUI PENTRU STRAINĂTATE ESTE DE 00 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **M. GHERMANESCU**: CONICA CELOR NOU PUNCTE A UNUI TRIUNGHIU.
2. **CEZAR COSNITA**: O TEOREMA RELATIV LA CONICE SI CUADRICE.
3. NOTE MATEMATICE 25, 26
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 359, 524, 2225, 2366, 2407, 2411, 2420, 2433, 2462, 2481, 2498, 2565.
6. PROBLEME PROPUSE: 2578-2594.
7. INFORMATII.

„Tipografia Românească", Timișoara.
Inreg. la Cam. de Com. sub No. 398 din 8/XII/931

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebue să fie apostolul specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul cat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă.

G. ȚIȚEICA

Cu publicarea articolului din acest număr, D-l Prof. *M. Ghermănescu* își reia activitatea la Revista Matematică din Timișoara.

D-l Prof. *Loziciuie* (Caransebeș) ne-a făcut printre elevii D-sale 35 de abonați. Deasemeni D-l Prof. *Mățieș V. I.* (Cl 10 abonați.

S'au primit la rev următoarele donații: *Roman Const.* (elev cl. VIII part. Timișoara) 2500 lei; *Lic. R. Sărat*, 500 lei; C-dor *Chiriac C.* (Galați), 250 lei; *Soare V. Mircea*, 170 lei; *Cercul științific Nicodim Ardelean* R. Vâlcea), 110 lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara, conținând articole, note, probleme propuse și rezolvate, vor fi trimise pe adresa: Prof. V. Alaci, Politehnica, Timișoara.

Administrația revistei aduce la cunoștința generală următoarele:

1. Abonamentul pe anul XXVIII (15 Martie 1948 — 15 Februarie 1949) este 300 lei pentru particulari și 600 pentru instituții.

2. Taxa de membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este de 200 lei.

3. Volumele I, XXIII, XXV, XXVI și XXVII sunt epuizate. Celelalte volume broșate se găsesc de vânzare cu prețul de 300 lei fiecare. La această sumă se va adăoga 50 lei costul expediției. In caz că se comandă mai multe volume se va adăoga la taxa de 26 lei pentru recomandat, câte 20 lei pentru fiecare volum.

4. Se găsesc de vânzare numere izolate din colecție chiar din volumele epuizate. Prețul unui număr este de 30 lei la care se adaogă 2 lei expediția. Din vol. XXVII se găsesc de vânzare no. 1, 4—12.

5. Se primesc reclamații că se pierde revista prin poștă. Aceste reclamații sunt adunate în ordinea sosirii lor și vor fi sătisfăcute la 15 Februarie 1948 când se vor vedea ce numere rămân descomplectate după legarea volumelor întregi. Orice reclamație de pierderea unui număr nu este luată în seamă decât la o lună dela data apariției acelui număr.

6. Tot ce privește administrația se va adresa D-lui Prof. **Gh. Th. Gheorghiu** str. Voltaire Nr. 1, Timișoara I. Reclamațiile ce necesită răspuns vor fi însoțite de o carte poștală timbrată legal.

7. Orice sumă destinată revistei se poate trimite prin CEC sub contul n-rul 85208 sau prin mandat postal D-lui Prof. **Gh Th. Gheorghiu** pe adresa de mai sus.

ANUL XXVII — NO. 12. TIMISOARA, FEBRUARIE 15

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

Prețul abonamentului este 300 lei pentru particulari și 600 lei pentru instituții.
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Politehnica Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. GH. TH. GHEORGHIU
Timișoara I, Str. Voltaire, No. 1.

CONICA CELOR NOUĂ PUNCTE A UNUI TRIUNGHIU.

DE

M. GHERMĂNESCU

Este bine cunoscut cercul celor nouă puncte, zis cercul lui *Euler* al unui triunghiu, care trece prin picioarele medianelor, înălțimilor și prin mijloacele distanțelor dintre vârfurile și ortocentrul acestuia. Se mai știe că dreptele care unesc picioarele medianelor cu aceste din urmă puncte concură în centrul cercului lui *Euler*, fiind chiar diametrii ai acestui cerc.

D. Prof *Em. Arghiriade* a mai demonstrat — pe când era încă elev de liceu — *Gazeta Matematică*, v. XXVI, 1920, p. 173. că și dreptele care unesc, reciproc, picioarele înălțimilor cu intersecțiile medianelor cu cercul lui *Euler* sunt concurente pe dreapta lui *Euler* (*Wallace*) a triunghiului.

Acest paralelism între cele două grupe de drepte concurente mi-a sugerat întrebarea dacă el constitue o proprietate caracteristică medianelor și înălțimilor unui triunghiu sau este vorba de un caz particular al unei proprietăți mai generale. A doua ipoteză s'a verificat, obținând câteva proprietăți remarcabile, care sunt, poate, noui.

I. *Fie* (AA', BB', CC'), (AA'', BB'', CC'') *două grupe de ceviene într'un triunghiu* ABC, *concurente respectiv în* M' *și* M'', *iar* (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) *intersecțiile acestora cu conica ce trece prin picioarele acestor șase ceviene. Dreptele* $(A'A_2, B'B_2, C'C_2)$, $(A''A_1, B''B_1, C''C_1)$ *sunt concurente în două puncte* G_1, G_2, *colineare cu* M' *și* M''.

În adevăr, fie $M'(\alpha', \beta', \gamma')$, $M''(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ punctele de concurență ale celor două grupe de ceviene, împreună cu coordonatele lor baricentrice; există o conică — și numai una singură — ce trece prin picioarele celor șase ceviene date, de ecuația baricentrică

$$(C)\beta'\gamma'\beta''\gamma''\alpha^2+\gamma'\alpha'\gamma''\alpha''\beta^2+\alpha'\beta'\alpha''\beta''\gamma^2-\alpha'\alpha''(\beta'\gamma''+\beta''\gamma')\beta\gamma-\beta'\beta''\gamma'\alpha''+\gamma''\alpha')\gamma\alpha-\gamma'\gamma''(\alpha'\beta''+\alpha''\beta')\alpha\beta=0.$$

Cevienele AA'', BB'', CC'' o mai taie — în afară de A'', B'', C'', — în punctele A_2, B_2, C_2, de coordonate

$$A_2(2\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma'',\ \beta'\gamma'\beta'',\ \beta'\gamma'\gamma'')$$ etc.,

astfel că ecuația baricentrică a dreptei $A'A_2$ este

$$\beta'\gamma'(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')\alpha+(2\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma'')(\gamma'\beta-\beta'\gamma)=0,$$

ecuațiile dreptelor $B'B_2, C'C_2$ obținându-se din aceasta prin permutări circulare. Dreptele $A'A_2, B'B_2, C'C_2$ sunt concurente dacă

$$D=\begin{vmatrix} \beta'\gamma'(\beta'\gamma''-\beta''\gamma' & \gamma'(2\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma'') & -\beta'(2\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma'') \\ -\gamma'(\beta'\gamma'\alpha''+2\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma'') & \gamma'\alpha'(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha') & \alpha'\beta'\gamma'\alpha''+2\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma'') \\ \beta'(\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+2\alpha'\beta'\gamma'') & -\alpha'(\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+2\alpha'\beta'\gamma'') & \alpha'\beta'(\alpha'\beta''-\alpha''\beta') \end{vmatrix}=0.$$

Efectuând calculele, găsim

$$D=(\alpha'\beta'\gamma')^2[(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')-(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')]=0.$$

Schimbând rolul punctelor M' și M'', găsim același rezultat, cu deosebirea că factorul $(\alpha'\beta'\gamma')^2$ este înlocuit prin $(\alpha''\beta''\gamma'')^2$.

Dacă punem, pentru prescurtare,

$$A=2\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma'',\quad A'=2\beta''\gamma''\alpha'+\gamma''\alpha''\beta'+\alpha''\beta''\gamma',$$ etc. găsim $G_1(\alpha' A, \beta' B, \gamma' C)$, $G_2(\alpha'' A', \beta'' B', \gamma'' C')$ și se verifică ușor că aceste puncte se află pe dreapta $M'M''$.

II. Coordonatele mijlocului segmentului AM″ fiind $(2\alpha''+\beta''+\gamma'',\ \beta'',\ \gamma'')$, acesta coincide cu A_2 dacă

$$\frac{2\beta'\gamma'\alpha''+\gamma'\alpha'\beta''+\alpha'\beta'\gamma''}{2\alpha''+\beta''+\gamma''}=\frac{\beta'\gamma'\beta''}{\beta''}=\frac{\beta'\gamma'\gamma''}{\gamma''},$$

din care rezultă $\gamma'(\alpha'-\beta')\beta''=\beta'(\gamma'-\alpha')\gamma''$. Dacă $M'(\alpha',\beta',\gamma')$ se află pe una din mediane, de exemplu, $\alpha'=\beta'$, trebue să avem şi $\alpha'=\gamma'$, deci M′ coincide cu centrul de greutate G al triunghiului Dacă M′ este diferit de G, rezultă că M″ are coordonatele baricentrice $\alpha'(\beta'-\gamma'),\ \beta'(\gamma'-\alpha'')\ \gamma'(\alpha'-\beta')$, deci se află pe dreapta dela infinit, $\alpha+\beta+\gamma=0$, caz neinteresant pentru noi. Rezultă că singura soluţie la distanţă finită există când M′ coincide cu G.

Conica, astfel obţinută, este *conica celor nouă puncte* a unui triunghiu ABC, relativă la un punct M din planul său*).

Ecuaţia sa, dedusă din (C), în care facem $\alpha'=\beta'=\gamma'$, este

$$(C')\qquad \begin{aligned}&\beta''\gamma''\alpha^2+\gamma''\alpha''\beta^2+\alpha''\beta''\gamma^2-\alpha''(\beta''+\gamma'')\beta\gamma-\\&\beta(\gamma''+\alpha'')\gamma\alpha-\gamma''(\alpha''+\beta'')\alpha\beta=0\end{aligned}$$

şi reprezintă o elipsă sau o iperbolă, după cum expresia $\delta=\alpha''\beta''\gamma''(\alpha''+\beta''+\gamma'')$ este pozitivă sau negativă, neavând parabolă decât dacă M″ se află pe una din laturi sau la infinit, cazuri neinteresante pentru noi. Centrul conicei este în punctul $G_1(2\alpha''+\beta''+\gamma'',\ \alpha''+2\beta''+\gamma'',\ \alpha''+\beta''+2\gamma'')$, situat pe dreapta GM″, astfel ca $G_1M''=3G_1G$. Conica se reduce la un cerc când

$$\frac{\alpha''(\beta''+\gamma'')}{a^2}=\frac{\beta''(\gamma''+\alpha'')}{b^2}=\frac{\gamma''(\alpha''+\beta'')}{c^2},$$

care duce la M″(tg A, tg B, tg C) adică, la ortocentrul H al triunghiului. Ea se reduce la o iperbolă echilateră când

$$a^2\beta''\gamma''+b^2\gamma''\alpha''+c^2\alpha''\beta''=0$$

adică M″ se află pe cercul circumscris triunghiului.

Proprietăţile cunoscute ale cercului lui *Euler* sunt deci cazuri particulare ale următoarelor dintre care, 1° şi 4° sunt cunoscute:

1°. *Conica ce trece prin picioarele medianelor şi cevienelor unui punct* M *din planul unui triunghiu* ABC *mai trece şi prin mijloacele distanţelor punctului* M *la vârfurile triunghiului, având centrul* G_1 *pe dreapta* GM, *astfel ca* $G_1M=3G_1G$, *unde* G *este centrul de greutate al triunghiului.*

2°. *Dreptele care unesc picioarele medianelor cu mijloacele distanţelor punctului* M *la vârfurile triunghiului concură în centrul* G_1 *al conicei, care este centrul de greutate al patrupunctului* ABCM.

3°. *Dreptele care unesc picioarele cevienelor lui* M *cu punctele unde conica tae a doua oară medianele triunghiului sunt concurente într'un punct* G_2, *situat pe dreapta* GM.

4°. *Conica se reduce la cercul lui EULER când* M *este în ortocentrul triunghiului, la o iperbolă echilateră când* M *se află pe cercul circumscris acestuia sau la a doua elipsă a lui STEINER când* M *este în* G.

Propunem găsirea încă a altor proprietăţi în legătură cu această conică**).

*) C. *Coşniţă*, Coordonnées barycentriquse, p. 103.

O TEOREMĂ RELATIVĂ LA CONICE ŞI CUADRICE.

DE

CEZAR COŞNIŢĂ

1. Teorema pe care o dau în cele ce urmează este o aplicaţie a noţiunii de *putere* a unui punct, în raport cu o conică sau o cuadrică.

În Teza mea de Doctorat *(Sur les courbes et les surfaces anallagmatiques)* am întrodus noţiunea de *putere* a unui punct, în raport cu o curbă sau suprafaţă *algebrică* oarecare, în modul următor:

Fie (C) *o curbă algebrică plană de gradul m, iar* M, N *două puncte fixe din planul ei. Prin punctul* N *se duc cele m direcţii asimptotice ale curbei* (C). *O dreaptă variabilă dusă prin punctul* M *intersectează curba* (C) *în punctele* $M_1, M_2, \ldots M_m$ *şi cele m direcţii asimptotice duse prin* N *în punctele* $M_1', M_2', \ldots, M_m'$.

Raportul:

$$\frac{\overline{MM_1}\cdot\overline{MM_2}\ldots\overline{MM_m}}{\overline{MM_1'}\cdot\overline{MM_2'}\ldots\overline{MM_m'}}$$

păstrează o voloare constantă, pe care am numit-o

**) Comunicând distinsului meu coleg, D-l Prof *Gh. Th. Gheorghiu*, aceste proprietăţi, D-sa le-a dat o nouă demonstraţie — mai puţin elementară, este drept — regăsindu-le prin aplicarea unei transformări *afine* chiar configuraţiei cercului lui *Euler*.

puterea punctului M, în raport cu curba (C) şi punctul N.

Fie (S) *o suprafaţă algebrică de gradul m, iar* M, N *două puncte fixe din spaţiu. Se consideră apoi conul cu vârful în* N *şi având generatoarele sale paralele cu ale conului asimptot al suprafeţei* (S), *fie* (C) *acest con. O dreaptă variabilă dusă prin punctul* M *intersectează suprafaţa* (S) *în punctele* $M_1, M_2, \ldots, M_m$, *iar conul* (C) *în punctele*

$$M_1', M_2', \ldots, M_m'.$$

Raportul:

$$\frac{\overline{MM_1}\cdot\overline{MM_2}\ldots\overline{MM_m}}{\overline{MM_1'}\cdot\overline{MM_2'}\ldots\overline{MM_m'}}$$

păstrează o valoare constantă, pe care am numit-o *puterea* punctului M, în raport *cu suprafaţa* (S) *şi punctul* N.

Nu voi reface aici demonstraţia teoremei în cazul general, — demonstraţie care dealtfel, nu prezintă nici o dificultate, nici nu voi enumera diferitele cazuri particulare din lucrarea menţionată. Voi face numai o aplicaţie, presupunând curba (C) o conică, iar suprafaţa (S) o cuadrică. Pentru unitatea expunerii, voi demonstra teorema în acest caz particular.

Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ coordonatele punctelor M,N, iar:

(1) $f(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

ecuaţia conicei (C). Dacă notăm cu α, β cosinusii directori ai dreptei dusă prin M, pe care am ales un sens pozitiv, se vede numaidecât vă vectorii $\overline{MM_1}$ şi $\overline{MM_2}$ sunt rădăcinile ecuaţiei în r:

$$f(x_1+r\alpha, y_1+r\beta) \equiv a_{11}(x_1+r\alpha)^2 + 2a_{12}(x_1+r\alpha)(y_1+r\beta) + a_{22}(y_1+r\beta)^2 + 2a_{13}(x_1+r\alpha) + 2a_{23}(y_1+r\beta) + a_{33} = 0,$$

care, ordonată în raport cu r, se mai scrie:

$$r^2\varphi(\alpha,\beta) + 2r[a_{11}x_1\alpha + a_{12}(x_1\beta + y_1\alpha) + a_{22}y_1\beta + a_{13}\alpha + a_{23}\beta] + f(x_1, y_2) = 0,$$

unde am notat:

$$\varphi(x,y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Deci:

(1′) $$\overline{MM_1}\cdot\overline{MM_2} = \frac{f(x_1,y_1)}{\varphi(\alpha,\beta)}.$$

Pe de altă parte, ecuaţia celor două direcţii asimptotice, corespunzătoare punctului N este următoarea:

(2) $$\varphi(x-x_2,\ y-y_2) \equiv a_{11}(x-x_2)^2 + 2a_{12}(x-x_2)(y-y_2) + a_{22}(y-y_2)^2 = 0,$$ sau:

(2′) $$\varphi(x-x_2, y-y_2) \equiv \varphi(x,y) - 2[a_{11}x_2x + a_{12}(x_2y + y_2x) + a_{22}y_2y] + \varphi(x_2,y_2) = 0.$$

Vectorii $\overline{MM_1}'$, $\overline{MM_2}'$ sunt deci rădăcinile ecuaţiei:

$$\varphi(x_1+r\alpha-x_2, y_1+r\beta-y_2) \equiv \varphi(x_1-x_2+r\alpha, y_1-y_2+r\beta) = 0,$$

şi se vede uşor că avem:

$$\overline{MM_1}'\cdot\overline{MM_2}' = \frac{\varphi(x_1-x_2,\ y_1-y_2)}{\varphi(\alpha,\beta)}.$$

Din (1′) şi (3) rezultă teorema noastră:

$$\frac{\overline{MM_1}\cdot\overline{MM_2}}{\overline{MM_1}'\cdot\overline{MM_2}'} = \frac{f(x_1,y_1)}{\varphi(x_1-x_2, y_1-y_2)} = \text{constant}.$$

Pentru o nouă conică; demonstraţia este exact la fel.

2. Din cele de mai sus, se vede că teorema este valabilă pentru orice conică sau cuadrică, indiferent dacă direcţiile asimptotice sunt reale sau imaginare.

Cititorii obişnuiţi cu curbe sau suprafeţe reale, vor putea presupune — fără nici o particularizare a problemei — că (C) este o iperbolă, iar (S) este un iperboloid.

Iată acum teorema pe care o vom dovedi:

Fie (C) *o conică, iar* (C′) *un cerc în acelaş plan. Aceste două conice se intersectează în punctele* P_1, P_2, P_3, P_4, *iar perechile de drepte:* (P_1P_2, P_3P_4), (P_1P_3, P_2P_4), (P_1P_4, P_2P_3) *se intersectează în punctele* X, Y, Z (vârfurile triunghiului conjugat comun conicelor din fascicolul determinat de conicele date). *Direcţiile asimptotice ale conicei* (C), *duse printr'un punct* N *intersectează primele două drepte în patru puncte aşezate pe un cerc* (C_1), *iar pe celelalte două perechi de drepte în alte două grupe de câte patru*

puncte, aşezate pe câte un alt cerc (C_2), (C_3). *Cele trei cercuri* (C_1), (C_2), (C_3) *formează un fascicol punctual.*

Să însemnăm cu M′ M″ şi N′, N″ punctele în cari dreptele P_1P_2, P_3P_4 intersectează cele două direcţii asimptotice duse prin punctul N. Avem relaţia:

$$\frac{\overline{XP_1}}{\overline{XM'}}\cdot\frac{\overline{XP_2}}{\overline{XM''}}=\frac{\overline{XP_3}}{\overline{XN'}}\cdot\frac{\overline{XP_4}}{\overline{XN''}}.$$

Dar produsele dela numărător sunt egale, ele reprezentând puterea punctului X, în raport cu cercul (C′) deci:

$$\overline{XM'}\cdot\overline{XM''}=\overline{XN'}\cdot\overline{XN''},$$

adică punctele M′, M″, N′, N″ sunt aşezate pe un acelaş cerc (C). La fel se arată că celelalte două grupe de puncte analoage sunt aşezate pe câte un acelaş cerc (C_2), (C_3).

Vom dovedi acum că cele trei cercuri (C_1), (C_2), (C_3) formează un fascicol punctual. Fie I, I′ *punctele centrale* ale involuţiilor determinate de conicele fascicolului (C, C′) pe direcţiile asimptotice duse prin punctul N. Produsul $\overline{IM'}\cdot\overline{IN'}$ este egal cu celelalte două produse similare; tot asemenea produsul $\overline{I'M''}\cdot\overline{I'N''}$ este egal cu celelalte două produse similare, deci punctele I, I′ au puteri egale în raport cu cele trei cercuri (C_1), (C_2), (C_3). Rezultă dar că aceste trei cercuri formează un fascicol punctual, axa fascicolului fiind dreapta II′. Să precizăm poziţia punctelor I, I′. Notăm cu (D), (D′) cele două direcţii asimptotice duse prin N, iar cu m_∞, m'_∞ punctele dela infinit ale acestor drepte, adică punctele dela infinit ale conicei (C). Dreptele (D), (D′) taie conica în punctele *n*, *n′* la distanţă finită. Punctele *n*, m_∞ fiind puncte omologe în involuţia de pe dreapta (D), urmează că punctele duble ale acestei involuţii sunt simetrice în raport cu punctul *n* (deoarece formează o diviziune armonică împreună cu punctele *n*, m_∞). Aşadar punctul *n* este punctul central al involuţiei, adică el coincide cu punctul pe care le-am notat mai înainte cu I. Tot aşa se vede că punctele *n′* şi I′ coincid, adică *axa radicală a cercurilor* (C_1), (C_2), (C_3) *este dreapta care uneşte punctele dela distanţă finită, în cari dreptele* (D), (D′) *tae conica* (C).

Axa radicală a celor trei cercuri este, cum se vede, independentă de cercul (C′).

3. Proprietatea se extinde şi în spaţiu astfel:

Fie (Q) *o cuadrică,* (S) *o sferă,* A_1, A_2, A_3, A_4 *vârfurile tetraedrului conjugat comun cuadricelor din fascicolul* (Q, S). *Se ştie că punctele* A_1, A_2, A_3, A_4 *sunt vârfurile a patru conuri de gradul al doilea trecând prin bicuadratica de intersecţie a cuadricelor date: însemnăm cu* (B_1), (B_2), (B_3), (B_4) *bicuadraticele de intersecţe ale acestor conuri cu conul* (Γ) *având vârful într'un punct oarecare* N *din spaţiu, iar generatoarele sale fiind paralele cu ale conului asimptot al cuadricei* (Q). *Cele patru bicuadratice* (B_1), (B_2), B_3, (B_4), *sunt sferice, iar sferele* (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) *cari le conţin fac parte dintr'un fascicol punctual de sfere al căror plan radical comun este planul conicei dela distanţă finită, intersecţia cuadricei* (Q) *şi conului* (Γ).

Să însemnăm prin (C) conica dela infinit a cuadricei (Q), iar prin I, J, K, L punctele de intersecţie ale conicei (C) cu *ombilicala* (cercul dela infinit al spaţiului). Punctele dela infinit ale bicuadraticei de intersecţie dintre (Q) şi (S) — puncte cari aparţin tuturor cuadricelor din fascicolul (Q, S) — şi deci conicelor dela infinit ale acestor cuadrice — sunt, evident, tocmai punctele I, J, K, L. Bicuadratica (B_1) are ca puncte la infinit, punctele în cari conica dela infinit a conului (Γ) — adică chiar conica (C) — se intersectează cu conica dela infinit a conului cu vârful A_1 şi trecând prin bicuadratica (Q,S). Aceste puncte sunt, deci, însăşi punctele I, J, K, L.

Să considerăm pe bicuadratica (B_1) trei perechi de puncte corespunzătoare (M_1, M'_1), (M_2, M'_2), (M_3, M'_3), adică aşezate pe câte o generatoare a conului cu vârful A_1, considerat mai sus. Cele trei generatoare înţeapă cuadrica (Q) în perechile de puncte (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), (m_3, m'_3). Avem relaţiile:

$$\frac{\overline{A_1m_1}\cdot\overline{A_1m'_1}}{\overline{A_1M_1}\cdot\overline{A_1M'_1}}=\frac{\overline{A_1m_2}\cdot\overline{A_1m'_2}}{\overline{A_1M_2}\cdot\overline{A_1M'_2}}=\frac{\overline{A_1m_3}\cdot\overline{A_1m'_3}}{\overline{A_1M_3}\cdot\overline{A_1M'_3}}.$$

Numărătorii acestor fracţii fiind egali — deoarece reprezintă puterea punctului A_1 în raport cu sfera (S) — rezultă că şi numitorii sunt egali, deci:

$$\overline{A_1M_1}\cdot\overline{A_1M'_1}=\overline{A_1M_2}\cdot\overline{A_1M'_2}=\overline{A_1M_3}\cdot\overline{A_1M'_3}.$$

Din aceste egalităţi deducem că cele şase puncte M_1, M_2, M_3 M'_1, M'_2, M'_3 sunt aşezate pe aceeaşi sferă (cercurile M_1 M_2 M_3, M'_1 M'_2 M'_3 sunt inverse, deci sunt aşezate pe aceeaşi sferă). Bicuadratica (B_1) are în comun cu sfera (S_1) zece puncte:

M_1, M_1', M_2, M_2', M_3, M_3', I, J, K, L, adică mai mult ca nouă — numărul minim de puncte necesar pentruca o bicuadratică să fie conținută de o cuadrică.

În definitiv, am dovedit ca bicuadratica (B_1) este situată pe o sferă (S_1); la fel se dovedește că bicuadraticele (B_2), (B_3), (B_4) sunt așezate pe alte trei sfere (S_2), (S_3), (S_4).

Să considerăm o generatoare (G) a conului (Γ). Cuadricele din fascicolul (Q, S) determină pe (G) o involuție, al cărei punct central să-l însemnăm cu I.

În particular, cele patru conuri ale fascicolului sunt înțepate de (G) în perechile de puncte:

$$(a_1\ a_1'),\ (a_2,\ a_2'),\ (a_3,\ a_3'),\ (a_4,\ a_4'),$$

așa fel ca:

$$\overline{Ia_1}\cdot\overline{Ia_1'} = \overline{Ia_2}\cdot\overline{Ia_2'} = \overline{Ia_3}\cdot\overline{Ia_3'} = \overline{Ia_4}\cdot\overline{Ia_4'}.$$

Aceleași involuții îi aparțin însă și punctele de intersecție ale generatoarei (G) cu cuadrica (Q). Cum însă unul din aceste puncte este la infinit, urmează că al doilea punct va fi mijlocul segmentului determinat de punctele duble ale involuției, adică tocmai punctul central I al involuției.

Așadar, punctele de intersecție ale cuadricei (Q) cu conul (Γ), situate la distanță finită, au puteri egale în raport cu sferele (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), deci planul conicei care conține aceste puncte este planul comun celor patru sfere.

NOTE MATEMATICE

25. — **Problème.** *Trouver toutes les solutions entières du système*

$$X_1,\ X_2 \overset{p}{=} Y_1,\ Y_2,\ Z \qquad (p=1,3),$$

avec le condition $X_2 - X_1 = Y_2 - Y_1$.

En posant $X_1 = x - r$, $X_2 = x + r$, $Y_1 = y - r$, $Y_2 = y + r$, il vient $Z = 2(x-y)$, puis la condition

$$x^3 - y^3 - r^2(x-y) - 4xy(x-y) = 0.$$

Après suppression de la solution triviale $x = y$ celle-ci devient $x^2 - 3xy + y^2 = r^2$ équation d'un type comun.

Nous povons obtenir toutes les solutions entières de cette équation par le procédé indiqué dans *Dickson*, Einführung in die Zahlentheorie, Leipzig, 1931, p. 39 et sq.

Solution particulière: $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 1$.

Solution complète:

$$x = \varrho(-u^2 + v^2),\ y = \varrho(-2uv + 3v^2),$$
$$r = \varrho(u^2 - 3uv + v^2),$$

u et v étant des entiers premiers entre eux et ϱ un facteur de proportionnalité. Donc, en supprimant ϱ,

$$\begin{array}{|c|}\hline -2u^2+3uv,\ -3uv+2v^2 \overset{p}{=} -u^2+uv+2v^2,\ u^2 \\ -5uv+4v^2,\ -2u^2+4uv-4v^2 \\ \hline \end{array}$$

$(p = 1, 3)$.

Exemples numériques.

u	v		S_1	S_3
1	2	$2, 4, \overset{1,3}{=} 7, 9, (-10)$	6	72
2	3	solution triviale		
3	4	$(-4), 18 \overset{1,3}{=} 13, 35, (-34)$	14	5.768
4	5	$(-5), 14 \overset{1,3}{=} 8, 27, (-26)$	9	2.619

A. GLODEN

---

26. — *Asupra tangentelor și polarelor la conice.* În cele ce urmează ne propunem să deducem ecuațiile tangentelor și polarelor la conice, pe altă cale decât cea obișnuită în cursurile de Geometrie Analitică.

Pentru aceasta pornim dela problemele următoare:

1° Să se găsească ecuația coardei într'o conică, ce are mijlocul într'un punct dat $M(\alpha, \beta)$.

2°. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor ce tae printr'un punct fix $P(x_0, y_0)$.

Vom trata problemele pe rând la conice cu centru și parabolă.

I. *Conice cu centru.* $Ax^2 + By^2 - 1 = 0$

1°. Fie $y - \beta = m(x - \alpha)$ coarda. m se determină scriind că e conjugat direcției coardei OM. (O centrul conicei). Insă $m_{OM} = \frac{\beta}{\alpha}$ deci $m = -\frac{A}{B}\frac{\alpha}{\beta}$ deci ecuația coardei este $y - \beta = -\frac{A}{B}\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha)$; $B\beta y - B\beta^2 + A\alpha x - A\alpha^2 = 0$, sau

$$(1) \qquad A\alpha x + B\beta y = A\alpha^2 + A\beta^2.$$

2°. Deoarece M e variabil $\alpha = x$, $\beta = y$ și fiindcă P este pe coardă: $A\alpha^2 + B\beta^2 = A\alpha x_0 + B\beta y_0$ deci locul cerut este,

$$(2) \qquad Ax^2 + By^2 = Ax_0 x + By_0 y$$

conică de acelaşi gen ca cea dată.

II. *Parabola* $y^2 - 2px = 0$.

1°. Fie coarda $y - \beta = m(x - \alpha)$. Intersectând o cu parabola, găsim că abscisele punctelor de intersecţie sunt date de ecuaţia:

$$\beta^2 + m^2x^2 + \alpha^2m^2 + 2m\beta x - 2m\alpha\beta - 2m^2\alpha x - 2px = 0$$

sau

$$m^2x^2 - 2(p + m^2\alpha - m\beta) + \alpha^2m^2 - 2m\alpha\beta \pm \beta^2 = 0.$$

De aci se vede că abscisa mijlocului coardei e dată de:

$$x_M = \frac{m^2\alpha - m\beta + p}{m^2},$$

însă

$$x_M = \alpha \text{ deci } m^2\alpha = m^2\alpha - m\beta + p, \quad m = \frac{p}{\beta}$$

deci ecuaţia coardei e:

$$y - \beta = \frac{p}{\beta}(x - \alpha); \quad \beta y - \beta^2 = px - \alpha p;$$

$$\beta y - p(x + \alpha) = \beta^2 - 2p\alpha. \tag{3}$$

2°. Avem de eliminat pe α şi β între (1) $\alpha = x$, (2) $\beta = y$ şi (3) $\beta y_0 - p(x_0 + \alpha) = \beta^2 - 2p\alpha$ dec locul e:

$$y_0y - p(x + x_0) = y^2 - 2px \tag{4}$$

tot o parabolă.

Aplicaţie. a) *Ecuaţiile canonice ale tangentelor.* Dacă M e pe conică, avem în cazul conicelor cu centru

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = 1 \tag{5}$$

şi în cazul parabolei

$$y\beta^2 - 2p\alpha = 0, \tag{6}$$

iar coarda devine tangentă. Deci ec. tangentei se educe din ec. coardelor, ţinând seama de (5) şi (6 deci e:

$$A\alpha x + B\beta y - 1 = 0$$

în cazul conicelor cu centru şi

$$By - p(x + \alpha) = 0$$

în cazul parabolei cu condiţia $M(\alpha, \beta)$ să fie pe conică.

b) *Ecuaţiile canonice ale polarelor.* Curba loc geometric dela 2° conţine şi cele 2 puncte de tangenţă ale tangentelor ce se pot duce din P, căci pentru aceste puncte mijloacele coardelor se confundă cu extremităţile ei. Deci coarda comună conicei iniţiale şi a locului geometric este chiar polara lui P. Ecuaţiile polarelor deci se deduc prin scădere:

$$Ax_0x + By_0y = Ax^2 + By^2, \quad 1 = Ax^2 + By^2,$$
$$Ax_0x + By_0y - 1 = 0$$

la conice cu centru şi

$$y_0y - p(x + x_0) = y^2 - 2px, \quad 0 = y^2 - 2px,$$
$$y_0y - p(x + x_0) = 0$$

la parabolă.

MARCEL D. COTARIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică.* Anul LIII, N-rul 5, Ianuarie 1948. Relaţia între funcţiile aritmetice elementare, de *I. B. Florescu.* Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

2. *V. Vâlcovici:* Le torseur d'une solide dans un champ de forces centrifuges. (Académie Roumaine, T. XXX,No 2).

3. *V. Vâlcovici:* Ecuaţii diferenţiale în Fizică. (Ed. Agir).

4. *V. Vâlcovici:* Asupra unor funcţiuni transcendente. (G. M An. LIII, No. 4, 1947).

PROBLEME REZOLVATE*)

Problema 359. — *Două plane înclinate fiind în prelungire, sunt reprezentate prin liniile de cea mai mare pantă* AB *şi* BC, *care fac respectiv cu orizontala* AX *unghiurile* α *şi* β. *Pe fiecare din aceste planuri se găseşte câte un punct material* M_1 *şi* M_2 *de greutate* G_1 *şi* G_2, *având coeficienţii de frecare* f_1 *şi* f_2. *Punctele sunt legate invariabil printr'un fir inextensibil şi de greutate neglijabilă. Să se găsească condiţiile de echilibru.*

HORATIU GH. HRISTEA

Soluţia. Vom reaminti mai întâiu condiţia de echilibru al unui punct material M de greutate G, care se mişcă cu frecare pe un plan, înclinat cu unghiul α pe planul orizontal, coeficientul de frecare fiind $f = \operatorname{tg}\varphi$. Această condiţie este:

$$f = \operatorname{tg}\varphi \geqq \operatorname{tg}\alpha \tag{1}$$

În rezolvarea problemei vom considera 3 cazuri. Într'adevăr, fie AB linia de cea mai mare pantă a primului plan, care face cu orizontala AX unghiul $\alpha < 90°$. Prin B ducem orizontala BY. După poziţia liniei de cea mai mare pantă BC, a planului al doilea, faţă de orizontala BY vom avea cele 3 cazuri:

*) Printre rezolvitorii probmei 2345 trebue trecut şi d-l *Stănescu D. C.* Deasemeni la problema 2469 trebuesc trecuţi şi D-l *Cândea M. V,* şi *Purcea M. I.* Aceste soluţii au fost primite conform instrucţiunilor dela no. 3, rubrica *informaţii.*

Cazul I: BC sub BY; Cazul II: BC deasupra lui BY şi $\beta < \alpha$; Cazul III: BC deasupra lui BY şi $\alpha < \beta < 90^0$.

Să le studiem pe rând.

Cazul I. Acest caz este rezolvat în Culegerea de probleme de mecanică de *A. G. Ioachimescu*, revăzută *de Gabriela Ţiţeica*, cap. XIV, problema 7, însă numai pentru echilibru limit. În cele ce urmează vom determina condiţiile generale de echilibru, aşa cum cere problema, condiţii cari, în echilibru cu frecare, se exprimă prin inegalităţi.

Fie $G_1 \sin\alpha$ şi $G_2 \sin\beta$ componentele tangenţiale ale celor două greutăţi. Sistemul de puncte va tinde să se deplaseze în jurul planului ce are componenta tangenţială mai mare, aşa că va trebui să a cem trei presupuneri:

(2) 1^0 $\qquad G_1 \sin\alpha > G_2 \sin\beta$

Cu această presupunere condiţia de echilibru va fi:

$$G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\beta \leqq f_1 G_1 \cos\alpha + f_2 G_2 \cos\beta$$

sau

$$(3)\quad \frac{G_1}{G_2} \geqq \frac{\sin\alpha - f_1\cos\alpha}{\sin\beta + f_2\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - f_1)}{\cos\beta\,(\operatorname{tg}\beta + f_2)}.$$

Observări: a) Condiţiile generale de echilibru sunt exprimate prin (2) şi (3). Examinând (3) constatăm că există un caz particular în care această condiţie e verificată anume când $f_1 \geqq \operatorname{tg}\alpha$, adică dacă M_1 satisface condiţia (1) de a fi în parte în echilibru. Deci, fiind îndeplinită conditia (2 iar M_1 fiind în parte în echilibru, sistemul *e* în echilibru indiferent dacă M_2 îndeplineşte sau nu condiţia de a fi în parte în echilibru. În toate celelalte cazuri condiţiile sunt (2) şi (3).

b) În cazul echilibrului limit avem egalitate în (3) şi făcând $f_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $f_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ obţinem condiţia stabilită în culegerea citată.

(4) 2^0 $\qquad G_2 \sin\beta > G_1 \sin\alpha$

Ca în presupunerea precedentă, vom determina condiţia de echilibru:

$$(5)\quad \frac{G_1}{G_2} \geqq \frac{\cos\beta\,(\operatorname{tg}\beta - f_2)}{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + f_1)} = \frac{\cos\varphi_1 \cdot \cos(\beta - \varphi_2)}{\cos\varphi_2 \cdot \sin(\alpha + \varphi_1)}.$$

La fel observările sunt aceleaşi.

3^0. $G_1 \sin\alpha = G_2 \sin\beta$ avem echilibru, deoarece nu mai există o forţă care să învingă frecările punctelor.

Cazul II. Sistemul de puncte tinde să se deplaseze în josul planelor. Dela început facem următoarea observare: M_2 trebue să satisfacă condiţia de a fi în parte în echilibru, adică

(6) $\qquad f_1 \geqq \operatorname{tg}\beta,$

căci altfel M_2 alunecă pe planul BC până ajunge în B pe planul AB, indiferent de acţiunea lui M_1 şi nu mai suntem în cazul echilibrului pe două plane, ci pe un plan, problemă cunoscută (problema 3, Cap. XIV din culegerea mai sus citată).

Condiţia de echilibru va fi:

$$G_1 \sin\alpha + G_2 \sin\beta \leqq f_1 G_1 \cos\alpha + f_2 G_2 \cos\beta$$

sau ţinând seamă că (6) este verificată, adică

$$f_2 - \operatorname{tg}\beta > 0$$

vom avea:

$$(7)\quad \frac{G_2}{G_1} \geqq \frac{\sin\alpha - f_1\cos\alpha}{f_2\cos\beta - \sin\beta} = \frac{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - f_1)}{\cos\beta\,(f_2 - \operatorname{tg}\beta)}$$

(6) şi (7) sunt condiţiile generale de echilibru în acest caz.

Constatăm că, în particular, (7) e satisfăcută dacă $f_1 \geqq \operatorname{tg}\alpha$, ceeace era de aşteptat, deoarece în acest caz cele două puncte sunt în parte în echilibru.

Cazul III. Observarea făcută în cazul II este valabilă şi aici, deci trebue neapărat să fie satisfăcută condiţia (6): $f_2 \geqq \operatorname{tg}\beta$. În acest caz, pentru a stabili condiţia de echilibru, vom nota cu T tensinea firului. Fie γ şi δ respectiv unghiurile ce le face direcţia firului cu planele AB şi BC. E foarte uşor de constatat că vom avea:

(8) $\qquad \gamma + \delta = \beta - \alpha$

Scriind echilibrul fiecărei punct şi presupunând că punctele nu pot ieşi din plane, vom avea condiţiile:

$$G_1 \sin\alpha - T\cos\gamma \leqq f_1 (G_1\cos\alpha - T\sin\gamma)$$
$$G_2 \sin\beta + T\cos\delta \leqq f_2 (G_2\cos\beta - T\sin\delta)$$

sau

$$G_1\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - f_1) \leqq T\cos\gamma\,(1 - f_1\operatorname{tg}\gamma)$$
$$G_2\cos\beta\,(f_2 - \operatorname{tg}\beta) \geqq T\cos\gamma\,(1 + f_2\operatorname{tg}\delta)$$

Ultima inegalitate are cei doi membri pozitivi, deoarece din condiţia (6) avem $f_2 - \operatorname{tg}\beta > 0$ Ţinând seamă şi de sensul acestei inegalităţi, putem împărţi membru cu membru prima cu a doua:

$$\frac{G_1}{G_2}\,\frac{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - f_1)}{\cos\beta\,(f_2 - \operatorname{tg}\beta)} \leqq \frac{\cos\gamma\,(1 - f_1\operatorname{tg}\gamma)}{\cos\delta\,(1 + f_2\operatorname{tg}\delta)}$$

sau

$$(9)\qquad \frac{G_1}{G_2}\,\frac{\sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \beta)} \leqq \frac{\cos(\varphi_1 + \gamma)}{\cos(\varphi_2 - \delta)}.$$

Şi aici remarcăm că (9) e îndeplinită în cazul particular când $f_1 \geqq \operatorname{tg}\alpha$ sau $\varphi_1 \geqq \alpha$, deoarece membrul întâi e negativ şi membrul doi pozitiv. În acest caz, punctele sunt în parte în echilibru.

A studiat parţial cazul I d-nul *Cornel C. Brădeţeanu* (Craiova).

Silaş Gh.

Problema 524. — *Se dau n forţe concurente care formează două câte două unghiuri egale şi ale căror extremităţi descriu o dreaptă dată. Se cere locul geometric al extremităţii rezultantei lor.*

ION C. SCHILERU-DILY

Soluţie dată de D-nul *Segârceanu D. C.* (Craiova). Fie O punctul de aplicare al forţelor (D) dreapta ce descriu extremităţile forţelor. Luând perpendiculara coborâtă din O pe (D) drept axă Ox şi perpendiculara dusă pe ea prin O drept axă Oy, componentele pe axa Ox a celor n forţe vor fi toate egale cu distanţa dela O la dreapta (D). Rezultanta având drept componentă pe axa Ox de n ori această distanţă, ea va fi constantă şi deci locul extremităţei rezultantei va fi o paralelă la (D), depărtate de O cu de n ori la distanţa lui (D) la O.

Gh. Th. Gh.

Problema 2225. — *Să se găsească un patrat perfect de 6 cifre ştiind că ultimele sale 3 cifre de la dreapta, scrise într'o ordine oarecare, dau rădăcina patrată. Exemplu:*

$$177\,241 = 421^2.$$

G-L GH BUICLIU

Soluţie. Fie M un întreg oarecare şi a, b, c cifre. Problema comportă examinarea următoarelor 6 cazuri:

I. $10^3 M + 10^2 a + 10 b + c = (10^2 a + 10 b + c)^2$.
II. $10^3 M + 10^2 a + 10 b + c = (10^2 a + 10 c + b)^2$.
III. $10^3 M + 10^2 a + 10 b + c = (10^2 b + 10 c + c)^2$.
IV. $10^3 M + 10^2 a + 10 b + c = (10^2 b + 10 c + a)^2$.
V. $10^3 M + 10^2 a + 10 b + c = (10^2 c + 10 a + b)^2$.
VI. $10^3 M + 10^2 a + 10 b + c = (10^2 c + 10 b + a)^2$.

Vom examina unul din aceste cazuri, pentru celelalte dăm numai rezultatele. Fie cazul VI. Dezvoltând patratul din membrul al doilea se vede că egalitatea are loc în numere întregi dacă $a^2 - c$ se divide prin 10. Pentru aceasta a şi c trebue să aibă următoarele grupe de valori corespunzătoare.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Dacă $c=0$ atunci şi $b=0$ şi problema nu are sens.

Fie $c = 1$. Inlocuind pe a şi c în VI prin 1, şi făcând reducerile rămâne

$$10^3 M + 6 = 10^4 + 10^2 b^2 + 2 \cdot 10^3 b$$

care este imposibilă pentrucă 6 nu se divide prin 10.

Ajungem tot la o imposibilitate pentru $a = 2$ şi $c = 4$.

Fie $a = 3$, $c = 9$. Înlocuind în VI găsim

$$10^2 M + 3 \cdot 10 = 81 \cdot 10^3 + 10 \cdot b^2 + 18 \cdot 10^2 \cdot b + 54 \cdot 10 + 5 \cdot b.$$

Ca egalitatea să aibă loc trebue ca $5b$ să se dividă prin 10, adică b să fie pereche. Dând lui b pe rând valorile 0, 2, 4, 6, 8 se găseşte soluţia

$$927369 = 963^2.$$

Examinând pe aceiaş cale toate cazurile se găseşte ca problema are următoarele 4 soluţii de 6 cifre

1°. $141376 = 376^2$; 2°. $177241 = 421^2$.
3°. $390625 = 625^2$; 4°. $927369 = 963^2$.

şi următoarele 3 soluţii formal de 6 cifre.

5°. $042025 = 205^2$; 6°. $002500 = 500^2$;
7°. $003600 = 600^2$

precum şi soluţia banală

$$000001 = 001^2.$$

Notă. Soluţia precedentă este redijată după soluţia primită de la D-l *Const. C. Chiriac* (Brăila), care a scăpat însă soluţia 4°, soluţiile formale şi soluţia banală.

D-l *Gh. A. Grigore* a găsit pe o cale diferită cele 4 soluţii.

D-l *Gavrilă F. Creţă* (P. T.), a găsit cele 4 soluţii întrebuinţând metoda calculului aritmetic de ridicare la patrat.

D-l *P. P Teodorescu*, folosind articolul *Patrate isofinale*. publicat de D-l *I. V. Mătieş* la pag. 402 Vol. XLIX *Gazeta Matematică* a găsit soluţiile 1°, 2° şi 4°

Celelalte soluţii primite sunt inacceptabile.

Problema 2366. — *Considerăm punctele* A(*a*,0), B(0, *b*), P(*p*, *q*). *O dreaptă variabilă dusă prin* P *taie axele coordonate în* M *şi* N. *Locul geometric al intersecţiei dreptelor* AN, BM *este conică* (C) *circumscrisă triunghiului* OAB; *tangentele la conică în* A *şi* B *sunt dreptele* PA, PB. *Dacă* P *este situat pe iperbloa* $4xy = ab$, *conica* (C) *este o parabolă. Dacă* A *şi* B *tind către infinit pe axele* O*x*, O*y*, *conica* (C) *devine o iperbolă echilateră.*

N. N. MIHAILEANU

Soluţie. Fie $y - q = \lambda(x - p$ ecuaţia unei drepte duse prin P, care taie axele în

$$M\left(\frac{\lambda p - q}{\lambda}, 0\right), \quad N(0, q - \lambda p);$$

dreptele AN, BM au ecuaţiile

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{q - \lambda p} = 1, \quad \frac{\lambda x}{\lambda p - q} + \frac{y}{b} = 1.$$

Eliminarea lui λ, conduce la ecuaţia locului geometric

$$bqx^2 + abxy + apy^2 - ab(qx + py) = 0,$$

care reprezintă o conică; natura ei este dată de semnul discriminantnlui

$$\delta = ab\left(pq - \frac{1}{4}ab\right).$$

Dacă împărţim ecuaţia conicei cu *a*, *b* şi facem apoi pe *a*, *b* să tindă către infinit, ecuaţia devine

$$xy = qx + py.$$

Propoziţiile din enunţ se justifică cu uşurinţă.

Observări. 1° Au dat bune soluţii analitice, D-nii: *Radu Beşchea* (P. B), *Ioan T. Birănaş* (P. T), *Gh. Braşoveanu*, (Craiova), *Ion I Cârnaţiu* (P. T.), *Ilie N. Constantinescu* (P. T.), *Aurel Coţiu* (student, Cluij), *Ioan N. Gligor* (student, Aliuş), *Eugen A. Macavei* (P. T.), *Aurel Mitric*(P.T.), *Dionisie Palade* (P. T.). *Dumitru Popascu* (P. T.), *Mihai Serengău* (P. T.), *Gearge D. Stănilă* (Buzău), *P. P. Teodorescu* (Bucureşti).

2° D-l *P. P. Teodorescu* (lic. Matei Basarab, Bucureşti) a dat o frumoasă soluţie geometrică ce se va publica sub formă de notă.

Problema 2407. — *Se dă un cerc şi două puncte fixe* A *şi* B *situate pe acest cerc. Fie* M *nn punct mobil pe cerc, Să se găsească locul geometric al intersecţiei dreptei* AM *cu perpendiculara coborîtă din mijlocul segmentului* MB *pe* AM.

AUREL MITRIC

Soluţie dată de d-l *Radu Sp. Haret* (lic. francez, Bucureşti). Fie N mijlocul lui BM şi P proiecţia lui N pe AM. Perpendiculara din M pe AM trece prin C, diametralul lui A; deci paralela NP la MC dusă prin mijlocul lui BM, trece prin mijlocul I al lui BC. I este un punct fix deci P *descrie cercul de diametru* AI. Acest cerc trece şi prin B.

Observări. 1° D-l *A. Coţiu* (Cluj) observă că problema se află şi în cursul de Geometrie Analitică de *N. Abramescu* pag. 111 (ed. II), 102 (ed. III).

2° Bune *soluţii geometrice* au dat şi d-nii: *G. P. Boerescu* (C-pt), *N. A. Cernescu*, *P. Constantinescu*, *C. Corduneanu*, *I. T Muntcanu* (C. N. N. F.), *V. Stanciu* (I. M. Craiova), *P. P. Teodorescu* (I. M. Basarab).

3° Au dat *soluţii analitice*, d-nii: *I. N. Constantinescu*, *A Coţiu*, *M. Giurconiu*, *I. N. Gligor*, *R. Haret*, *D. S, Marinescu*, *M. Săsârman*, *G. Turbuţiu*.

4° S'au primit numeroase soluţii în cazuri particulare.

Problema 2411. — Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$x^2 = y^2 + z^3.$$

G-L. GH. BUICLIU

Soluţie. Ecuaţia dată se mai scrie sub forma

$$(x - y)(x + y) = z^3.$$

Fie *m* şi *n* două numere întregi de aceiaşi paritate astfel în cât

$$x - y = m, \quad x + y = n, \quad mn = z^3.$$

Primele două din aceste ecuaţii dau

$$x = \frac{m + n}{2}, \qquad y = \frac{n - m}{2}.$$

Soluţiile problemei se obţin luând 2 numere de aceiaşi paritate *m* şi *n* al căror produs este un cub. Problema are o infinitate de soluţii.

1°. Au dat această soluţii d-nii *Giurconiu M.* (P. T.), *Gheţu G. Eugen* (Lic. Brăila), şi *Teodorescu P. Petru* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti).

2°. În afară de aceştia problema a mai fost atacată de încă 26 corespondenţi, care mai toţi au făcut particularizarea următoare. Din 61 au dedus

$$x+y=z^2 \quad \text{şi} \quad x-y=z$$

Ori z^3, chiar când z este prim se descompune cel puţin în 2 feluri în produsul a 2 numere, în $1 \cdot z^3$ şi $z \cdot z^2$.

Alţii au dat o serie de exemple numerice ceia ce nu rezolvă problema în cazul general.

3°. D-l *Teodorescu P. P.* a arătat că se rezolvă la fel ecuaţia

$$x^2=y^2+z^m.$$

Gh. B.

Problema 2420. — *Să se rezolve ecuaţia*

$$\sqrt{x^2+3c^2}-\sqrt{x^2-c^2}=\sqrt{a^2-c^2} \quad (a>c)$$

radicalii fiind aritmetici. Soluţia se găseşte prin ridicări la pătrat. Care sunt condiţiile ce trebuesc impuse lui a şi c ca această soluţie să satisfacă ecuaţia dată.

GH. TH. GHEORGHIU

Soluţia. Ridicând la pătrat ecuaţia dată şi izolând radicalul, găsim

$$2x^2+3c^2-a^2=2\sqrt{(x^2+3c^2)(x^2-c^2)}.$$

Ridicând din nou la pătrat şi rezolvând se găseşte soluţia

$$x^2=\frac{21c^4+a^4-6a^2c^2}{4(a^2-c^2)}.$$

Cu ajutorul acestei valori găsim expresiile

$$x^2+3c^2=\frac{(a+3c^2)^2}{4(a^2-c^2)}, \quad x^2-c^2=\frac{(5c^2-a^2)^2}{4(a^2-c^2)}.$$

Calculând radicalul aritmetic din prima expresie, găsim întotdeauna

$$\sqrt{x^2+3c^2}=\frac{a^2+3c^2}{2\sqrt{a^2-c^2}},$$

deoarece expresia a^2+3c^2 este întotdeauna pozitivă dacă a şi c sunt reali (problema în enunţul ei presupune implicit această condiţie căci altfel inegalitatea $a>c$ nu ar avea sens. E bine să ne dăm seamă de acest lucru deoarece inegalităţile nu au sens între numere imaginare). Făcând acelaşi calcul pentru expresia a doua, se obţin două valori

$$\sqrt{x^2-c^2}=\begin{cases}\dfrac{5c^2-a^2}{2\sqrt{a^2-c^2}} & \text{dacă } a^2\leq 5c^2\\[2ex] \dfrac{a^2-5c^2}{2\sqrt{a^2-c^2}} & \text{dacă } a^2>5c^2\end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia dată se constată că prima parte este egală cu a doua numai în ipoteza $a^2\leq 5c^2$. Această condiţie se mai scrie

$$-\sqrt{5}c\leq a\leq\sqrt{5}c.$$

Combinând această dublă inegalitate cu ipoteza iniţială $a>c$, rezultă că trebue să avem $c<a\leq\sqrt{5}c$.

Observări. 1°. Ecuaţia din enunţ am găsit-o într'o culegere de probleme unde s'a dat soluţia fără a se face discuţia dată mai sus. Acesta a fost rostul problemei.

2°. Problema 2420 se referă la materia clasei a V-a de liceu. Din 31 soluţii primite, dela colaboratori cu studii mai înaintate, nici unul din cl. V-a, numai soluţia D-lui *Teodorescu P. P.* poate fi menţionată D-sa nu a ajuns la dubla inegalitate finală, dar a ajuns în mod corect la inegalitatea $a^2\leq 5c^2$. Rugăm pe colaboratorii noştrii, în special pe cei cari ne cer mereu să publicăm mai multe probleme propuse elementare, să dea o atenţie mai mare redactării soluţiilor ce ne trimet. Pe noi ne interesează în primul rând *calitatea* şi apoi *cantitatea*.

Gh. Th Gh.

Problema 2433. — *Coordonatele Timişoarei şi ale portului Chilian Valparaiso sunt:*

$\varphi_1=45°,\ 46'\ \text{N}$ $\qquad$ $\varphi_2=33°,02'\ \text{S}$

$\lambda_1=21°,\ 15'\ \text{E},$ $\qquad$ $\lambda_2=71°,33'\ \text{W}.$

Se cere: a) *Coordonatele mijlocului distanţei dintre cele două oraşe.* b) *Din Timişoara în ce direcţie se află portul Valparaiso?*

LT. C-DOR C. V COSTACHESCU

Soluţia dată de D-l *Teodorescu P. P.* (Bucureşti). Fie T şi V cele două oraşe. Meridianele lor taie ecuatorul în T' şi V'. Cercul mare care trece prin T şi V taie ecuatorul în E. Fie M mijlocul arcului TV şi M' punctul în care ecuatorul e tăiat de meridianul punctului M, iar O punctul de intersecţie al primului meridian cu ecuatorul. a) Din triunghiurile sferice dreptunghice TET' şi VEV' avem:

$$\operatorname{tg}\widehat{TET'}=\frac{\operatorname{tg}TT'}{\sin ET'}; \quad \operatorname{tg}\widehat{VEV'}=\frac{\operatorname{tg}VV'}{\sin V'E};$$

dar:

$$\widehat{TET'}=\widehat{VEV'} \quad \therefore \quad \frac{\operatorname{tg}TT'}{\sin ET'}=\frac{\operatorname{tg}VV'}{\sin V'E}:$$

notăm: $EO = x$. Avem: $TT' = \varphi_1$; $VV' = \varphi_2$: $ET' = x + \lambda_1$;

$V'E = \lambda_2 - x$. Deci: $\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\sin(x+\lambda_1)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\sin(\lambda_2 - x)}$

$$\therefore \quad \frac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin(x+\lambda_1)} = \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_1}{\sin(\lambda_2 - x)} =$$

$$\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{2\sin\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\cos[x - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)]} =$$

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{2\cos\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\sin[x - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)]};$$

notăm: $x - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) = \alpha$

(1) $\quad \therefore \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Dar: $\varphi_1 - \varphi_2 = 45^0\,46^0 - 33^0\,02' = 12^0\,44'$;

$\varphi_1 + \varphi_2 = 45^0\,46' + 33^0\,02' = 78^0\,48'$;

$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2}(21^0\,15' + 71^0\,33') = \frac{1}{2} \cdot 92^0\,48' = 46^0\,24'$;

$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_2) = \frac{1}{2}(71^0\,33' - 21^0\,15') = \frac{1}{2} \times 50^0\,18' = 25^0\,09'$;

Deci: $x = \alpha + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) = \alpha + 25^0\,09'$;

ţinând seama de (1), vom avea:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 12^0\,44'}{\sin 78^0\,48'} \operatorname{tg} 46^0\,24';$$ şi aplicând logaritmii:

$$\log \operatorname{tg}\alpha = \log \sin 12^0\,44' + \operatorname{colog} \sin 78^0\,48' + \log \operatorname{tg} 46\,24' = \bar{1},34324 + 0,00835 + 0,02123 = 1,37282$$

$\therefore \alpha = 13^0\,16'\,34^0$ $\therefore x = 13^0\,16'\,34'' + 25^0\,09' = 38^0\,25'\,34''$

şi: $ET' = x + \lambda_1 = 38^0\,25'\,34'' + 21^0\,15' = 59^0\,40'\,34''$;

$V'E = \lambda_2 - x = 71^0\,33^0 - 38^0\,25'\,34' = 33^0\,07'\,26''$;

Din triunghiul dreptunghic TET', avem:

$$\cos TE = \cos TT' \cos ET''$$

$\therefore \log \cos TE = \log \cos 45^0\,46' + \log \cos 59^0\,40'\,34'' = \bar{1},84360 + \bar{1},70320 = \bar{1},54680$ $\therefore TE = 69^0\,22'\,39''$;

Din triunghiul dreptunghic VEV', avem:

$$\cos VE = \cos VV' \times \cos V'E$$

$\therefore \log \cos VE = \log \cos 33^0\,02' + \log \cos 33''\,07'\,26'' = \bar{1},92343 + \bar{1},92298 = \bar{1},84641$ $\therefore VE = 45^0\,24'\,09''$

$\therefore VT = TE + VE = 69^0\,22'\,39'' + 45^0\,24'\,09'' = 114^0\,46^0\,48''$;

$\therefore TM = \frac{1}{2} \times VT = \frac{1}{2} \times 114^0\,46'\,48'' = 57^0\,23'\,24''$;

$\therefore EM = TE - TM = 69^0\,22'\,39'' - 57^0\,23'\,24 = 11^0\,59'\,15''$;

Din triunghiul dreptunghic TET', avem:

$$\sin TET' = \frac{\sin TT'}{\sin TE};$$

Din triunghiul dreptunghic MEM', avem:

$$\sin MM' = \sin EM \sin TET'$$

$$\therefore \quad \sin MM' = \sin EM \frac{\sin TT'}{\sin TE}$$

$\therefore \log \sin MM' = \log \sin 11^0\,59'\,15'' + \log \sin 45^0\,46' + \operatorname{colog} \sin 69^0\,22'\,39'' =$

$= \bar{1},31743 + \bar{1},85522 + 0,02875 = \bar{1},20141$

$\therefore \quad MM' = 9^0\,08'\,57''$.

Din triunghiul dreptunghic MEM', avem:

$$\cos EM' = \frac{\cos EM}{\cos MM'}$$

$\therefore \log \cos EM' = \log \cos 11^0\,59'\,15'' - \log \cos 9^0\,08'\,57'' = \bar{1},99042 - \bar{1},99444 = \bar{1},99042 + 0,00656 = \bar{1},99598$ $\therefore EM' = 7^0\,47'$

$\therefore M'O = EO - EM' = 38^0\,25'\,34'' - 7^0\,47' = 30^0\,38'\,34''$;

Deci, coordonatele lui M, mijlocul distanţei dintre cele două oraşe, sunt

$$\varphi = 9^0\,08'\,57''\,N; \quad \lambda = 30^0\,38'\,34''\,W.$$

b) Din triunghiul dreptunghic TET', avem:

$$\operatorname{tg} \widehat{ETT'} = \frac{\operatorname{tg} ET'}{\sin TT'}$$

$\therefore \log \operatorname{tg} ETT' = \log \operatorname{tg} ET' + \operatorname{colog} \sin TT' = \log \operatorname{tg} 59^0\,40'\,34'' + \operatorname{colog} \sin 45^0\,46' = 0,23291 + 0,14478 = 0,37769$

$\therefore \quad \sphericalangle ETT' = 67^0\,15'\,43''$;

acesta e unghiul pe care ortodroma Timişoara — Valparaiso îl face cu meridianul Timişoarei şi ne dă direcţia de plecare dela Timişoara spre Valparaiso.

Observare. S'au primit şi trei soluţii greşite.

Gh. Th. Gh.

Problema 2462. — *Fie triunghiul* BAC *dreptunghic în* A *înscris în cercul* O. *Bisectoarea din* B *şi înălţimea din* A, *prelungite, întâlnesc, cercul în* B_1 *şi* A_1. *Să se calculeze perimetrul şi suprafaţa figurii* B_1ABA_1 *în funcţie de laturile triunghiului* BAC.

MAIOR G. P. BOERESCU

Soluţia. Deoarece diametrul BC este perpendicular pe coarda AA_1 o împarte în părţi egale pe ea şi arcul subîntins, adică avem: $AA_1 = 2AD =$

$2bc/a$, arc AB = arc BA_1 şi deci $AB = BA_1 = c$ (a, b, c sunt laturile triunghiului ABC). Avem încă $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle ABB_1 = \frac{1}{2}B$, $\sphericalangle AB_1A_1$ = arc ABA_1 = 2arc AB = $2C$ şi din triunghiul AA_1B_1 vom avea $\sphericalangle A_1AB_1 = 180^0 - (\sphericalangle AA_1B_1 + \sphericalangle AB_1A_1) = 2B$. Din acelaşi triunghiu scoatem

$$(1)\qquad \frac{A_1B_1}{\sin\frac{3}{2}B} = \frac{AB_1}{\sin\frac{1}{2}B} = \frac{AA_1}{\sin 2B} = \frac{2bc}{a\sin 2B}.$$

Cum însă din triunghiul iniţial scoatem

$$\sin B = \frac{b}{a},\quad \cos B = \frac{c}{a}$$

şi deci

$$\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos B)} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}},\quad \cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{a+c}{2a}},$$

avem mai departe

$$\sin\frac{3}{2}B = \sin\frac{1}{2}B\cos B + \sin B\cos\frac{1}{2}B$$

$$= \sqrt{\frac{a-c}{2a}}\,\frac{c}{a} + \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\sqrt{\frac{a+c}{2a}} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}\,\frac{a+2c}{a},$$

$$\sin 2B = 2\sin B\cos B = \frac{2bc}{a^2}.$$

Din egalităţile (1) rezultă

$$A_1B_1 = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}(a+2c),\quad AB_1 = a\sqrt{\frac{a-c}{2a}}.$$

Dacă însemnăm cu P perimetrul şi cu S suprafaţa patrulaterului B_1ABA_1 avem

$$P = 2c + 2(a+c)\sqrt{\frac{a-c}{2a}} = 2c + b\sqrt{\frac{2(a+c)}{a}}.$$

$$S = \tfrac{1}{2}AA_1 \cdot BD + \frac{AA_1^2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{3}{2}B}{2\sin 2B} =$$

$$\frac{bc}{a}\left[\frac{c^2}{a} + \frac{a-c}{2a}(a+2c)\right] = \frac{bc}{a}(a+c).$$

Singurele soluţii care n'au conţinut greşeli de calcul au fost date de d-nii: *Ciucescu Paul* (Slatina), *Diaconescu Vasile* (Predeal), *Gherlan I. Vasile* (Beiuş), *Novac I. Ioan* (Timişoara), *Pantea N. Alex.* (Beiuş) şi *Puşcaşiu M. Silviu* (Timişoara).

Problema se putea rezolva în mod analog dacă triunghiul ABC era oarecare.

Gh. Th. Gh.

Problema 2488. — *Să se arate că numărul 4567 se poate descompune într'o diferenţă de două pătrate.*

L-T. Col. Eug. St. Iacob

Soluţia. Ecuaţia problemei este

$$x^2 - y^2 = 4567,$$

sau

$$(x-y)(x+y) = 4567.$$

Cum numărul 4567 este un număr prim, relaţia precedentă având loc între numere întregi se poate descompune în

$$x - y = 1,\quad x + y = 4567,$$

de unde: $x = 2284$, $y = 2283$.

A rezolvat problema D-nii: *Cârciu I., Cioara Gh. Al., Ciucescu P., Constantinescu G. V., Deutsch E., Gherlan V., Măncescu N. I., Manolescu G., Mărcuţiu P. S., Nemeth E., Novac I. I., Pantea N. Alex., Pisanca N. I., Roman I. C., Ştefănescu I. S., Tarcea I., Târcomnicu D. C., Teodorescu P. P.* şi *Urdăreanu P.*

S'a primit şi o soluţie bună neiscălită.

Gh. Th. Gh.

Problema 2498 — *Să se rezolve ecuaţia*

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0,$$

şi să i se exprime apoi rădăcinile sub forma cea mai simplă.

Eugen Visa

Soluţia. Observăm că ecuaţia dată se mai poate scrie

$$(x^4 - 4x^3 + 4x^2) - 8(x^2 - 2x) - 8$$

$$\therefore\quad (x^2 - 2x)^2 - 8(x^2 - 2x) + 16 - 24 = 0$$

$$\therefore\quad [(x^2 - 2x) - 4]^2 - 24 = 0.$$

care se descompune în ecuaţiile

$$x^2 - 2x - 4 \pm \sqrt{24} = 0.$$

Rădăcinile acestor ecuaţii sunt

$$x_{1,2,3,4} = 1 \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{24}} = 1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3}.$$

Au rezolvat problema, punând rădăcinile sub forma de mai sus, D-nii: *Chiorean V. I., Cioara Gh. Alex., Ciucescu P., Cocoş Gh., De Sabota Ioan, Gertler N. R., Gherlan V., Iovănel Ch., Man I., Manolescu G., Mărcuţiu P. S., Marinescu S. D., Moldovan I. M., Munteanu G., Novac I. I., Pali S., Pisanca N. I., Purcea M. I., Râmboiu N.S., Ristea Gh., Sârbu I. Seracin E., Simeon L., Stan P., Stancu D. D., Székely G., Teleagă D., Teodorescu P. P.* şi *Zelingher N.*

Gh. Th. Gh.

Problema 2565. — *Să se scrie expresia*

$$\sqrt{a^2(a^2+1)-b^2(b^2-1)+2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}}$$
$$-\sqrt{a^2(a^2+1)-b^2(b^2-1)-2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}}$$

sub forma cea mai simplă

GH. TH. GHEORGHIU

Soluția. Din forma expresiei din enunț se vede că trebue să presupunem $a^2>b^2$. Notând cu E expresia din enunț, avem succesiv

$$E=\sqrt{(a^4-b^4)+(a^2+b^2)+2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}}$$
$$-\sqrt{(a^4-b^4)+(a^2+b^2)-2(a^2+b^2)\sqrt{a^2-b^2}}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left[\sqrt{(a^2-b^2)+1+2\sqrt{a^2-a^2}}\right.$$
$$\left.-\sqrt{(a^2-b^2)+1-2\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left[\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{a^2-b^2}-1)^2}\right].$$

Primul radical face întotdeauna $\sqrt{a^2-b^2}+1$, deoarece această sumă este întotdeauna pozitivă. Al doilea radical are drept valoare $\sqrt{a^2-b^2}-1$ dacă $a^2-b^2\geq 1$ sau $1-\sqrt{a^2-b^2}$ dacă $a^2-b^2<1$. Putem scrie deci

$$E=\begin{cases}2\sqrt{a^2+b^2} & \text{dacă } a^2-b^2\geq 1\\ 2\sqrt{a^4-b^4} & \text{„ } a^2-b^2\leq 1.\end{cases}$$

Nici una din soluțiile primite (în număr destul de mare) nu a făcut discuția de mai sus. În consecință rezultatele lor au fost parțiale și numele autorilor lor nu pot fi citate.

Gh. Th Gh.

PROBLEME PROPUSE*)

2587. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre de forma $aabcd$, știind că ultima cifră scrisă după a 3-a dă un patrat perfect, a treia cifră este egală cu de patru ori prima cifră, în fine a 4-a cifră este egală cu prima micșorată cu 2.

VASILE TODERASC

2588. — Să se arate că oricare ar fi a, b, c, avem

$$\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(a-b)^2}+\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(b-c)^2}+\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{(c-a)^2}\geq 4.$$

C. IONESCU-TIU

*) Problema 1821 se anulează fiind identică cu pr. 1756. Problema 1865 se anulează fiind identică cu pr. 1767. Problema 2475 se anulează având enunțul greșit.

2589. — Să se demonstreze identitatea

$$4\sum_{i=0}^{n-2}C_{2n+1}^{2i+1}C_{n-i}^{2}=(n-1)\sum_{i=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2i+1}C_{n-i}^{1}$$

unde C_p^q este simbolul combinărilor.

G-L GH. BUICLIU

2590. — Să se afle maximul, sau minimul funcției

$$(1)\qquad w=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

știind că variabilele $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ satisfac relațiile de legătură,

$$(2)\qquad \begin{cases}\dfrac{x_1-a_1}{A_1}=\dfrac{y_1-b_1}{B_1}=\dfrac{z_1-c_1}{C_1},\\ \dfrac{x_2-a_2}{A_2}=\dfrac{y_2-b_2}{B_2}=\dfrac{z_2-c_2}{C_2}.\end{cases}$$

Discuție. Interpretare geometrică.

EUGEN VISA

2591. — Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând unghiul A, latura BC și știind că vârful A se află pe o dreaptă dată, iar vârful C pe un cerc dat. Discuție.

M. GHERMANESCU

2592. — Se dă un triunghiu oarecare ABC și înălțimea AD. Din D se duc bisectoarele DE și DF în triunghiurile DAB și DAC. Să se calculeze suprafața triunghiului DEF, precum și razele cercurilor circumscris, înscris și exînscrise la acest triunghiu, în funcție de elementele triunghiului ABC.

V. ALACI

2593. — Dacă α, β, γ sunt unghiurile asociate ale unui triunghiu ABC, să se stabilească relația

$$\frac{a}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{4S}{r}.$$

IONEL PISANCA

2594. — Să se stabilească identitatea

$$2\sum_{p=1}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}\cdot\frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2p-2)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}\cos(n-2p)\theta$$
$$=\sum_{p=1}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^p\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2p+1)}{2.4\ldots 2p(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}\cos^{n-2p}\theta.$$

GH TH. GHEORGHIU

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE

a) Aritmetică,

		Pag.
V. Alaci,	Câteva teoreme de Algebră . . .	2, 15
E. Vişa,	Asupra unei metode pentru rezolvarea ecuaţiilor de gradul al patrulea	39
D. Pompeiu,	Un exerciţiu de Algebră şi o problemă de Analiză	79
E. Arghiriade,	Asupra regulei lui Hôspital . . .	92
Gh. V. Niculescu,	Ecuaţii cu rădăcinile în progresie aritmetică	135

b) Geometrie.

Gh. V. Niculescu,	Proprietăţi la patrulater	41
M. Ghermănescu,	Conica celor nouă puncte a unui triunghiu	159

c) Trigonometrie.

V. Alaci,	Câteva probleme de rezolvirea triunghiurilor în Trigonometria patratică	82

d) Geometrie analitică.

E. Vişa,	Cubice iperbolice unicursale . . .	55
E. Vişa,	Asupra unor cubice unicursale .	107,119
C. Coşniţă	O teoremă relativă la conice şi cuadrice	160

e) Analiză Matematică.

N. N. Mihăileanu,	Conice şi ecuaţii diferenţiale lineare	27
V. Alaci,	Condiţiile pentru ca ecuaţia diferenţială $(a_1x+b_1y)dx+(a_2xb_2y)dy=0$. Să se reprezinte conice, sau cubice	29

f) Diverse

V. Alaci,	† Nicolae Abramescu	1
P. Sergescu	Jubileul Profesorului Paul Montel	7
Gh.Th.Gheorghiu,	Articol de Metodologie . . .	67, 80, 91

II. REDACŢIONALE.

***	Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timişoara . .	12,13,14
***	Înştiinţare	39

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetica şi Teoria Numerelor

			Pag.
4*).	V. Thébault,	Sur des carrés curieux	19
6.	A. Gloden,	Les nombres de la forme $4p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$, $p, q, r, \ldots$, étant des nombres premiers de la forme $4s+1$, admettent autant de représentations de la forme x^2+y^2 que de la fome x^2-y^2. C'es nombres sont les seuls à jouir de cette propriété	31
11.	A. Gloden,	Curiosités arithmetiques dans divers systèmes de numeration . .	58
25.	A. Gloden,	Trouver toutes les solutions entières du système $X_2\ X_3 = Y_1, Y_2, Z$ $(2=1, 3)$, avec le condition $X_2-X_1=Y_2\,Y_1$	163

b) Algebră.

2.	A. Gloden,	Analyse indétermine multigrade .	19
8.	A. Gloden,	Analyse multigrade	43
13.	I. Kaufmann,	Un exemplu de funcţie derivabilă cu derivată discontinuă	70
15.	V. Ghiţescu,	Asupra problemei Nr. 2132 . . .	83
19.	I. Constantinescu,	Generalizarea problemei 2250	110
21.	V.G.Cavallaro,	Triangles et carrés numeriques .	123
22.	A. Gloden,	Un problème d'analyse diophantienne multigrade	137
24.	I. Constantinescu,	Asupra problemei 1906 . . .	138

c) Geometrie.

7.	V. Théboult,	A propos du triangle orthique .	31
9.	N.N.Mihăileanu,	O generalizare în legătură cu raportul armonic	43
10.	P. B. Boldescu,	Câteva proprietăţi al conicelor .	95
23.	A. Stan,	Asupra problemei 2031	138

d) Geometria Analitică.

26	M. D. Cotariu,	Asupra tangentelor şi polarelor la conice	163

e) Trigonometrie.

1.	C.V.Costăchescu,	Aplicaţiuni ale Trigonometriei patratice	6
3.	P. Teodorescu,	Asupra Notei 1 din R. M. T. Vol. XXVII, pag. 6—7	19
5.	C.V.Costăchescu,	Aplicaţii ale Trigonometriei patratice la Trigonometria sferică .	20
12.	„	Aplicaţii ale Trigonometriei patratice la Trigonometria sferică . .	56
14.	„	Asupra formulei deviaţiei compasului giroscopic, datorită vitesei şi drumului navei	70
16.	„	Aplicaţii ale Trigonometriei patratice la Navigaţia astronomică . .	84

*) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

V. **Alaci,** Asupra articolului al ?-lea din n-rul 7 ai R.M.T. pag. 82. . . . . Pag. 95

f) Analiză Matematică.

10. **V. Alaci,** O observare 44
20. **V. Ghiţescu,** Asupra problemei 2391 „R.M.T." 110

IV. BIBLIOGRAFIE.

a) Articole.

M. Şt. Botez, Contribuţie pentru o simplificare a sistemului de proecţie *Monge* într'un caz special 84

M. Şt. Botez, Studiul Geometriei Descriptive acum o sută de ani în România † Nic. Abramescu 84

M. Şt. Botez, Metode de rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice 113

I. Curea, Procédé d'approximation linéaire pour déterminer l'oscillation du sol 9

A. Gloden, Liste des formes linéaires des nombres dont le carré se termine dans le système decimal 32

A. Gloden, Quelques considérations sur l'évolution des théories concernant la structure unicléaire. II. Sur les forces agissant à l'interieur des voyaux atomiques 32

A. Gloden. Note concernant les travaux d'*Eddington* 32

A. Gloden, Le centenaire de la découverte de Neptune par *Le Verier* 32

A. Gloden, Sur la répartition spatiale et le nombre des étoiles fixes 32

A. Gloden, Table des solutions dela congruence $x^4 + 1 \equiv 0$ 139

D. I. Mangeron, Opera ştiinţifică a lui *Gustav Magnus Mittag-Leffler* 9

Al. Stoenescu, Sur le mouvement d'un solid dans un milieu résistant 32

Al. Stoenescu, Sur les systèmes des forces sous l'action desquelles un mobile parcours un trajectoire donnée . . . 32

Al. Stoenescu, Generalizarea formulei lui *Binet* 32

Al. Stoenescu, Extindere a unei metode întrebuinţată la studiul fenomenelor mecanice 32

Al. Stoenescu, Teoria Relativităţii 59

b) Cărţi şi cursuri apărute.

Gh.Th.Gheorghiu, 67 examene de admitere la Politechnicele din România 32,34

T. Ionescu, G. D. Simionescu şi Ionescu-Bujor, Aritmetică pentru cl. I şi a II-a . . . 113

c) Reviste.

Pag.

Annalles Scientifique de L'Université de Jassy . . 59
Boletin Matematico 71
Buletinul Polit. „Gh. Asachi" din Iaşi 21, 125
Bulletin Scientifique de L'École Polytechnique de Timişoara 9
Gazeta Matematică, 9, 21, 32, 44, 59, 71, 84, 96, 112, 125, 139, 164.

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Examen de admitere în anul I la Politehnica din Timişoara 20, 111, 124

VI. ERATĂ.

— Rectificare în nota Nr. 26 R.M.T. p. 135 an. XXVI 9
— Problema Nr. 178 se anulează 78
— Erori de tipar în problema Nr. 1858 78
— Rectificare în articolul „Articol de Metodologie" p. 68 90
— Rectificarea problemei Nr. 2424, p. 77 102
— N-rul problemei d-lui G-l *Gh. Buiclíu* dela p. 102, 118
— Problema Nr. 979 se anulează 118
— Problema Nr. 1454 se anulează fiind identică cu problema Nr. 1437 118
— Problema 2418 se anulează fiind identică cu problema Nr. 386 118
— Problema 1898 se anulează fiind identică cu problema Nr. 1571 118
— Problema 1821 se anulează fiind identică cu problema 1756 171
— Problema 1856 se anulează fiind identică eu problema 1767 171
— Problema 2475 se anulează având enunţul greşit 171

Următoarele probleme se şterg din tabloul problemelor nerezolvate, deoarece au fost rezolvate:

— Problema Nr. 550 în vol. XXV pag 104.
— „ „ 557 „ „ XV „ 78.
— „ „ 939 „ „ XXIII „ 141.
— „ „ 1008 „ „ XI „ 106.
— „ „ 1067 „ „ XXVI „ 71.
— „ „ 1108 „ „ XV „ 56.
— „ „ 1212 „ „ XVI „ 96.
— „ „ 1494 „ „ XVI „ 147 şi XXV p. 96.
— „ „ 1555 „ „ XVIII „ 56.
— „ „ 1559 „ „ XVIII „ 68.
— „ „ 1653 „ „ XIX „ 168.
— „ „ 1708 „ „ XVIII „ 100.
— „ „ 1797 „ „ XXI „ 42.
— „ „ 1800 „ „ XIX „ 131.
— „ „ 1880 „ „ XXII „ 59.
— „ „ 2043 „ „ XXIII „ 142.
— „ „ 2045 „ „ XXIII „ 142.
— „ „ 2052 „ „ XXIII „ 143.
— „ „ 2054 „ „ XXIII „ 143.

— Problema Nr. 2057 în vol. XXIV pag. 118.
— „ „ 2098 „ „ XXIII „ 145.
— „ „ 2209 „ „ XXIV „ 119.
— „ „ 2212 „ „ XXVI „ 84.
— „ „ 2233 „ „ XXV „ 59.
— „ „ 2250 „ „ XXVI „ 84.
— „ „ 2273 „ „ XXVI „ 152.
— „ „ 2279 „ „ XXV „ 60.
— „ „ 2388 „ „ XXVI „ 136.

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XXVI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
50	110	I	71
69	142	„	
110	14	II	
121	30	„	
124	46	„	44
140	62	„	45
175	110	„	139
185	126	„	
194	142	„	
206	174	„	45
217	185	„	
244	46	III	84
268	78	„	59
275	94	„	
291	126	„	
317	174	„	
344	30	IV	85
345	30	„	
347	46	„	60
359	62	„	164
376	94	„	
382	110	„	
393	126	„	60
407	158	„	113
411	158	„	
423	191	„	85
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	96
450	46	„	
458	62	„	113
460	62	„	
516	174	„	
519	190	„	
254	190	„	166

1).	2).	3).	4).
535	30	VI	
548	46	„	114
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	86
635	54	„	
654	102	„	
668	134	„	
695	199	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	113
794	190	„	140
860	108	IX	
867	122	„	
879	144	„	
924	60	„	
954	108	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
984	12	XI	
992	24	„	
1012	48	„	
1060	120	„	
1068	138	„	
1077	138	„	
1093	24	XII	
1107	48	„	
1115	60	„	

1).	2).	3).	4).
1116	60	XII	
1119	60	„	
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1183	12	XIII	
1187	24	„	
1188	24	„	
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1289	36	„	
1295	36	„	
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	

1).	2).	3).	4)
1323	88	XV	
1327	88	„	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1405	60	„	
1413	72	„	
1414	72	„	
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	
1486	40	XVI	
1490	52	„	

1).	2).	3).	4).
1493	52	XVI	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1514	88	„	
1516	88	„	73
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	97
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	97
1557	148	„	
1558	148	„	
1560	148	„	
1561	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	140
1571	24	„	
1575	24	„	86
1582	36	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1600	60	„	
1604	72	„	
1613	84	„	
1615	84	„	
1618	96	„	115
1621	96	„	
1624	96	„	
1627	108	„	
1628	108	„	
1632	108	„	
1637	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1643	132	„	140
1645	132	„	
1651	144	„	
1654	144	„	
1656	144	„	
1661	12	XVIII	46
1667	24	„	97
1668	24	„	86
1670	24	„	
1671	24	„	
1672	24	„	

1).	2).	3).	4).
1676	36	XVIII	
1678	36	„	
1679	36	„	
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1694	60	„	22
1695	60	„	
1706	84	„	
1709	84	„	
1711	84	„	
1714	96	„	115
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	97
1718	96	„	98
1722	108	„	
1724	108	„	
725	108	„	
	120	„	
1726	108	„	
1728	120	„	
1733	120	„	
1737	132	„	
1739	132	„	
1740	132	„	
1741	132	„	125
1742	132	„	
1744	149	„	
1747	149	„	
1749	149	„	61
1750	149	„	73
1754	16	XIX	74
1755	16	„	
1756	16	„	
1759	16	„	
1762	28	„	
1763	28	„	87
1764	28	„	
1767	28	„	
1769	40	XIX	
1772	40	„	
1780	56	„	
1781	56	„	
1784	80	„	126
1789	80	„	
1792	124	„	
1795	124	„	
1796	124	„	
1798	124	„	

1).	2).	3).	4).
1801	124	XIX	
1802	136	„	
1803	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1808	136	„	
1809	156	„	
1811	156	„	115
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1816	156	„	
1820	169	„	
1822	169	„	
1824	169	XIX	
	16	XX	
1832	18	„	
1833	28	„	98
1838	28	„	
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	
1847	44	„	
1849	44	„	
1852	56	„	
1853	56	„	
1854	56	„	98
1857	56	„	
1858	68	XX	61
1860	68	„	
1861	62	„	
1868	80	„	
1873	80	„	
1877	92	„	
1878	92	„	
1881	92	XX	
1882	104	„	
1886	104	„	
1889	104	„	
1893	116	„	
1894	116	„	
1897	116	„	
1901	128	„	
1903	128	„	
1905	128	„	
1906	140	„	62
1907	140	„	116
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1917	157	„	
1919	157	„	

1).	2).	3).	4).
1920	157	XX	
1921	157	„	
1922	12	XXI	
1925	12	„	
1926	12	„	
1930	12	„	
1932	24	„	
1935	24	„	
1937	24	„	
1938	36	„	
1940	36	„	
1941	36	„	
1942	36	„	
1943	36	„	
1944	36	„	
1945	48	„	
1949	48	„	74
1950	48	„	
1951	48	„	116
1952	48	„	
1953	48	„	
1954	64	„	
1957	64	„	
1958	64	„	
1961	64	„	
1963	76	„	
1964	76	„	
1965	76	„	
1966	76	„	
1967	76	„	
1968	76	„	
1971	88	„	
1972	88	„	
1973	88	„	
1974	88	„	
1975	88	„	
1976	88	„	
1977	88	„	
1979	100	„	99
1982	100	„	
1983	100	„	
1984	100	„	
1986	112	„	
1989	112	„	
1990	112	„	
1991	112	„	141
1995	124	„	
1996	124	„	75
2000	124	„	
2001	124	„	
2003	136	„	
2004	136	„	

1).	2).	3).	4).
2009	136	XXI	
2012	148	„	
2015	148	„	
2016	148	„	
2017	148	„	
2018	16	XXII	
2019	16	„	
2022	16	„	
2024	16	„	
2025	16	„	
2026	16	„	
2027	36	„	
2032	30	„	
2033	30	„	
2035	42	„	
2039	42	„	
2040	42	„	
2042	54	„	
2046	54	„	
2047	54	„	
2048	54	„	
2049	54	„	
2050	66	„	
2051	66	„	
2053	66	„	
2055	66	„	
2056	66	„	
2058	78	„	
2062	78	„	
2063	78	„	
2064	78	„	
2065	78	„	
2073	90	„	
2074	102	„	
2078	102	„	
2080	102	„	
2086	114	„	100
2087	114	„	
2090	126	„	
2093	126	„	
2094	129	„	
2095	126	„	
2096	126	„	
2099	138	„	
2100	138	„	
2102	138	„	
2103	138	„	
2104	138	„	
2108	150	„	
2110	150	„	
2111	150	„	
2117	12	XXIII	

1).	2).	3).	4).
2118	12	XXIII	
	66	XXVI	
2119	12	„	
2121	12	„	
2122	26	„	62
2126	26	„	
2127	26	„	
2128	26	„	
2129	26	„	
2131	38	„	75
2133	38	„	
2134	38	„	
2135	38	XXIII	
2136	38	„	
2137	38	„	
2140	50	„	
2142	50	„	
2143	50	„	
2147	62	„	
2149	62	„	
2153	62	„	
2158	74	„	
2159	74	„	
2165	86	„	
2166	86	„	
2167	86	„	
2168	86	„	32
2178	110	„	75
2179	110	„	
2180	110	„	
2183	110	„	
2184	110	„	
2189	123	„	
2193	134	„	
2194	134	„	
2195	134	„	
2197	134	„	63
2199	134	„	
2200	134	„	
2201	146	„	
2202	146	„	
2204	146	„	
2205	146	„	
2206	146	„	
2208	146	„	
2210	11	XXIV	
2211	11	„	
2215	11	„	
2218	26	„	
2219	26	„	
2220	26	„	
2221	26	„	
2222	26	„	

1).	2).	3).	4).
2223	26	XXIV	
2224	26	„	
2225	38	„	166
2229	38	„	
2230	38	„	
2234	50	„	
2235	50	„	
2238	50	„	
2239	50	„	
2247	62	„	128
2248	62	„	
2249	74	„	100
2251	74	„	
2254	74	„	
2255	74	„	
2258	86	„	
2259	86	„	
2261	86	„	
2262	86	„	
2266	98	„	
2268	98	„	
2270	98	„	37
2271	98	„	
1274	110	„	
2275	110	„	
2276	110	„	
2277	110	„	
2278	110	„	
2280	110	„	
2281	122	„	
2282	122	„	
2283	122	„	
2286	122	„	
2287	122	„	
2291	134	„	
2292	134	„	
2293	134	„	101
2294	134	„	
2295	134	„	
2297	146	„	
2301	146	„	
2303	146	„	
2306	11	XXV	
2307	11	„	
2308	11	„	
2314	26	„	
2315	26	„	
2316	26	„	
2317	26	„	
2320	26	„	116
2321	38	„	
2322	38	„	
2323	38	„	
2224	38	„	

1).	2).	3).	4).
2325	38	XXV	
2326	38	„	
2327	38	„	
2328	38	„	
2329	50	„	
2330	50	„	
2331	50	„	
2333	50	„	
2334	50	„	
2336	50	„	
2338	62	„	141
2340	62	„	
2341	62	„	
2343	62	„	
2344	62	„	
2345	74	„	117
2346	74	„	
2348	74	„	
2349	74	„	
2351	74	„	
2353	86	„	128
2354	86	„	
2356	86	„	
2358	86	„	
2361	98	„	
2362	98	XXIV	
	66	XXV	
2365	98	„	
2366	98	„	167
2368	98	„	
2369	110	„	
2370	110	„	
2371	110	„	128
2372	110	„	
2373	110	„	
2374	110	„	
2375	110	„	
2376	110	„	
2377	121	„	
2378	121	„	
2379	121	„	117
2382	122	„	
2383	122	„	76
2385	122	„	
2386	134	„	
2387	134	„	
2392	134	„	
2394	146	„	
2397	146	„	
2398	146	„	
2402	11	XXVI	

1).	2).	3)	4)
2407	11	XXVII	167
2408	11	„	142
2411	26	„	167
2412	26	„	142
2413	26	„	9
2414	26	„	
2415	26	„	
2416	26	„	143
2417	26	„	
2418	38	„	22
2419	38	„	10
2420	38	„	168
2421	38	„	
2422	38	„	
2423	38	„	87
2424	38	„	77
2425	38	„	
2426	50	„	
2427	50	„	142
2428	50	„	
2429	50	„	89
2430	50	„	23
2431	50	„	24
2432	50	„	25
2433	50	„	168
2434	66	„	
2435	66	„	35
2436	66	„	
2437	66	„	144
2438	66	„	144
2439	66	„	33
2440	76	„	
2441	76	„	
2442	76	„	
2443	76	„	34
2444	76	„	
2445	76	„	
2446	76	„	
2447	76	„	145
2448	88	„	
2449	88	„	
2450	88	„	35
2451	88	„	
2452	88	„	146
2453	88	„	146
2454	88	„	35
2455	88	„	

1).	2).	3).	4).
2456	100	XXVI	47
2457	100	„	
2458	100	„	48
2459	100	„	65
2460	100	„	146
2461	100	„	
2462	100	„	169
2463	100	„	
2464	116	„	
2465	116	„	
2466	116	„	49
2467	116	„	
2468	116	„	
2469	116	„	147
2470	116	„	
2471	116	„	
2472	128	„	
2473	128	„	49
2474	128	„	
2476	128	„	147
2477	128	„	
2478	128	„	
2479	128	„	
2480	144	„	148
2481	144	„	
2482	144	„	
2483	144	„	
2484	144	„	
2485	144	„	
2486	144	„	
2487	144	„	
2488	156	„	170
2489	156	„	
2490	156	„	148
2491	156	„	
2492	156	„	149
2493	156	„	
2494	156	„	
2495	156	„	
2496	11	XXVII	
2497	11	„	149
2498	11	„	170
2499	11	„	149
2500	11	„	
2501	11	„	150
2502	11	„	

1).	2).	3).	4).
2503	11	XXVII	
2504	26	„	
2505	26	„	151
2506	26	„	151
2507	26	„	
2508	26	„	152
2509	26	„	152
2510	26	„	
2511	26	„	
2512	38	„	153
2513	38	„	153
2514	38	„	
2515	38	„	
2516	38	„	
2517	38	„	
2518	38	„	
2519	38	„	129
2520	38	„	
2521	50	„	
2522	50	„	129
2523	50	„	
2524	50	„	
2525	50	„	
2526	50	„	
2527	50	„	
2528	50	„	
2529	66	„	
2530	66	„	
2531	66	„	
2532	66	„	
2533	66	„	
2534	66	„	
2535	66	„	129
2536	66	„	
2537	78	„	
2538	78	„	
2539	78	„	
2540	78	„	
2541	78	„	
2542	78	„	
2543	78	„	
2544	78	„	
2545	78	„	
2546	90	„	
2547	90	„	
2548	90	„	
2549	90	„	145
2550	90	„	153
2551	90	„	

1).	2).	3).	4).
2552	90	XXVII	
2553	90	„	
2554	90	„	
2555	102	„	
2556	102	„	
2557	102	„	
2558	102	„	
2559	102	„	
2560	102	„	
2561	102	„	
2562	102	„	
2563	118	„	
2564	118	„	
2565	118	„	171
2566	118	„	
2667	118	„	
2568	118	„	
2569	118	„	
2570	118	„	
2571	130	„	
2572	130	„	
2573	130	„	
2574	130	„	
2575	130	„	
2576	130	„	
2577	130	„	
2578	130	„	
2579	154	„	
2580	154	„	
2581	154	„	
2582	154	„	
2583	154	„	
2584	154	„	
2585	154	„	
2586	154	„	
2587	171	„	
2588	171	„	
2589	171	„	
2590	171	„	
2591	171	„	
2592	171	„	145
2593	171	„	
2594	171	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E. 59.
† Abramescu N. 1, 2, 9, 21, 39, 84, 86, 94, 96, 107, 167.
Abramescu Victoria 38.
Adam M. 84.
Adam D R. 12.
Adamescu M. 12.
Adomnichi V. 48, 49, 50,
Agapi V. 36, 47, 77.
Alaci V. 1, 2, 9, 10, 11, 12, 15, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 35, 38, 39, 44, 50, 51, 65, 66, 67, 77, 78, 79, 82, 90, 91, 95, 102, 103, 118, 119. 130, 131, 150, 154, 155, 171.
Alaci V. V. 12.
Aldea V. M. 98, 126.
Alexa M. 151.
Almăjan P. 12.
Almăşan L. 36, 47, 77, 89.
Ambruş F. 12.
Anastasescu D. 11, 24, 77.
Anastasescu M. 73.
Anastasiade I 12.
Andrievici N. 74.
Andronescu Pl. 9, 12.
Andrunachievici A. V. 86.
Angheluţă T 12.
Anitescu N. N. 12
Anton I. 74, 100
Antoni P. C. 22, 125.
Antoniu I. S. 21, 44, 59, 112, 125.
Apostol R 73.
Appell P 79.
Ardelean S 12.
Areşteanu O. H. 46.
Arghiriade E. 12, 78, 90, 92, 159.
Arnăutu M. 142.
Atanasiu D. 45, 46.
Aubert 79.
Aude T. R. 125.

Bădescu R. 12.
Bădulescu V. 94.
Bagiu N. I. 128.
Baidaff B. I. 12, 71.
Bakony C. 62, 73, 74, 75, 97, 100, 126.
Bălă C. 10, 24, 36, 48, 66, 77, 89, 144, 145, 146, 149, 152.
Balanişcu C. 10, 11, 24, 25, 35, 36, 48, 89, 142, 144, 145.
Bălăuţă M. 11, 24, 25, 36, 47, 77, 89, 129, 144.
Bănărescu M. 12.
Băncilă G. 12.
Baranga M. 48
Barbu A I. 128.
Barbul V. V. 63, 130, 149, 152, 153.
Bărglăzan A. 9, 12, 118.
Barna I, 12.
Baron C. 12.
Baz M. 48, 49, 50.
Becu C. 62
Begu I. S. 140.
Beju T. 86.
Beneş P. 12.
Berdan C. 45, 60
Bergmann M. 36, 144.
Berinde L. 140,
Berindean V. 12.
Bertrand Y. 95.
Berzănescu A. 12.
Beşchea R. 10, 11, 23, 24, 47, 77, 89, 129, 143, 144, 167.
Biernacki M. 9.
Bilcea D. 148.
Binet 32.
Birănaş I. 77, 102, 118, 128, 129, 142, 167.
Bitang A. 100.
Blaga O. 23, 35, 47, 50, 77, 89, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 152, 153.
Blaha N 9.
Blaşian V. 12.
Blaşco B. 86.
Bobârnac M. 12.
Boerescu P. G. 26, 48, 49, 50, 62, 76, 90. 116, 129, 143, 144, 146, 148, 152, 153, 154, 167, 169.
Bogdan C. P. 21, 59, 125.
Bogza M. 10, 11, 24, 25, 36, 47, 77, 89, 100, 128, 129, 142, 143, 144, 146
Boldescu B. P. 96.
Boldur E. 22.
Bonea I, 9, 12.
Bordaşiu N 100.
Borneanu G. 112.
Borneas M. 61.
Borş C. 125.
Boşian O. 12.
Bossie V. B. 62, 63.
Bota I. V. 147, 149.
Boţan V. N. 22.
Botez M. 12, 21, 84, 113, 125.
Brădăţeanu C. C. 45, 166.
Brădăţeanu V. 10.
Brasch A 10, 11, 77, 102, 128, 129, 143
Braşoveanu G. 11, 89, 144, 167.
Brătucu C. 12.
Buicliu G. 11, 12, 21, 26, 32, 37, 38, 44, 50, 61, 62, 63, 64, 66, 75, 78, 90, 100, 101, 102, 112, 118, 126, 128, 130, 154, 166, 168, 171.
Bumbu I V. 9, 12.
Bunescu D. A. 32, 84.
Buznea D. D 116.
Buznea H, 98.

Calinicenco N. 21.
Calistru C. 22.
Câlniceanu C. 12.
Călugăreanu G. 12.
Cândea C. 12.
Cândea G. 65, 144, 146, 152, 164.
Cânescu S. 149.
Caracaş C. 86.
Cârciu I. 48, 129, 142, 143. 144, 146, 147, 149, 152, 170
Cârlan S. N. 116.
Cârnaţiu I. I 167.
Cârstoiu I. 9.
Catona V. 12.
Cătuneanu C. 12.
Cauchy 93, 95.
Cavallaro G. V. 124.
Cazanacli V. P. 74.
Cernescu N. 11, 24, 25, 36, 77, 89, 144, 146, 167.
Cetăţanu St. 12.
Checian N. Ana 62.
Cherdivarencu I. 33.
Chioreanu V. I. 10, 47, 77, 89, 144, 149, 152, 171
Chiriac C. 10, 77, 98, 100, 102, 116, 117, 129, 141, 166.
Chiriţescu N. 12.
Cioară G. A. 129, 130, 148, 149, 151, 152, 153, 154 170, 171.
Ciobanu G 125.
Ciobanu V. 12.
Cioca I. I. 151, 152, 153, 154.
Ciochină I. 22.
Cioclov N. 12.
Ciorănescu N. 94, 113.
Ciucescu P. 11, 23, 24, 34, 35. 36, 47, 48, 49, 50, 65, 77, 89, 120, 130, 143, 144, 145, 146, 147. 148, 149, 151, 152, 153. 154, 168, 170, 171.
Claudian V. 12, 39.
Climescu C. A. 21, 59, 125.
Cocoş G. 48, 49, 129, 146, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 171.
Colesnic I. D. 100
Coman A. 11, 12, 98, 150.
Coman L. 10, 48, 129, 142, 144, 145, 146.
Comănescu A. 12.
Comloşan Cornelia 97.
Comşa C. 48, 148.
Constantinescu G. 12, 48, 149, 170.
Constantinescu G. G. 12.
Constantinescu I. 11, 22, 23, 33, 38, 50, 77, 100, 149, 152, 153, 167.
Constantinescu P. 25. 34, 35, 47, 48, 66, 89, 143, 144, 146, 167.
Constantinescu T. 112.
Constantinescu V 11, 24, 25, 36, 47, 48 49, 50, 65, 66, 77, 129, 144, 145, 146, 148.
Contrea A. 12.
Corduneanu C. 10, 11, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 48, 49, 66, 77, 89, 128, 144, 146, 147, 167.
Corlăţeanu V. 125.
Coşniţă C. 60, 86, 114, 154, 160.
Costăchescu C. V. 7, 11, 12, 20, 26, 38, 50. 66, 71, 84, 90, 98, 102, 117, 118, 130, 145, 168.
Costeanu G. 125.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Costin Alexandrina 11, 129. 142
Costin O. 130.
Coţiu A. 10, 11, 35, 47, 49, 65, 77, 129, 130, 143, 144, 146, 147, 149, 150, 153, 167.
Cotariu M. D. 164.
Crăcea D. 11, 23, 24, 25, 36, 47, 77, 89, 143, 144, 145.
Crăciun Silvia 48, 154.
Crăciunescu V. 10, 11, 34, 35, 36, 47, 77, 89, 128, 143, 144, 145, 146, 147.
Cramer 99.
Creangă I. 125.
Creţa F. G. 100, 167.
Cristache G. A. 33.
Cristea C. 117.
Cristea I. N. 46, 61, 86, 126.
Cristea D. V. 116.
Cristescu I. 12.
Cristescu V. 59.
Cristodorescu G. 12.
Cristodulo N. 12.
Criveanu Eufenia 77, 143.
Cserveny I. 12.
Cucu E. 48, 147.
Curcubătă D. 60.
Curea I. 9. 12.

Dănescu A. 10, 47, 77, 143, 144.
Dănescu D. 94.
Danilescu E. 129.
Dăscălescu H. 12, 46, 61, 86, 98,115, 126, 129, 130, 140, 141, 151, 154.
Dăscălescu M. 10, 23, 25, 47, 77, 89, 144, 145.
David V. 33, 100, 113.
Deaun R. 125.
Dehelean G. 74.
Demian T. 35, 147.
Demetrescu G. 12.
Descartes 39, 59.
Deutsch E 35, 36, 47, 50, 77, 89, 129, 130, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 170.
Diaconescu I. 48, 147.
Diaconescu N. 12.
Diaconescu V. 145, 170.
Diaconu I. 35, 146, 147, 149.
Diaconu V. 11, 23, 24, 25, 35, 36, 47, 48, 49, 66, 77, 143, 144, 146, 147. 170.
Diea Rodica 23, 35, 149, 142.
Dimitriu G. 12.
Dinculescu C. 12.
Dini 21.
Dinu D. 98.
Dobrotescu M. G. 116, 128.
Dobrescu A. 32, 66.
Dobrescu F. 12.
Dobrin A. 48.
Dobrişan A. 10, 11, 47, 77, 89, 129 142, 143, 144.
Domilescu E. 77.
Drăghicescu P. P. 71.
Drăgilă P. 9, 61, 74.
Dragomirescu Buzuc E. 45.
Dumitrescu A. 48.
Dumitru Dada 12.

Eddington 32.
Ellmann M. 77. 118.
Enache I. 33, 35, 62, 129, 144, 146.
Enăchescu I. 73, 75, 98, 100, 113, 126.
Euler 159, 160.

Făgărăşanu I. 48.
Faraday 112.
Feldsteiu M. S. 86.
Fermat 137.
Fleşeriu E. 10, 11, 35, 36, 48, 49, 65, 77, 143, 144, 145, 146, 147, 150, 152.
Florea V. 48.
Florescu M. 12.
Florescu V. 73.
Florescu I. B. 164.
Fichera G. 21.
Filipescu M. 12.
Filimon I. 48.
Fitero I. 10, 11, 143.
Focşa I. 94.
Focşeanu I. M. 45, 112.
François A. 10, 142
Francour L. B. 123.
Fränchel D. 117, 141.
Frătici I. 12.
Fridlovski A. 12.
Frumuşelu G. 86.
Frunză R. 64, 77, 129, 142.

Gaicu A. 10.
Gâlcea H 48, 50.
Gancea C. 10, 36.
Gâtă G. G. 62, 100.
Gauss 125.
Georgescu D. 97, 140.
Georgescu N. 33, 100, 146.
Georgescu Roegen 112.
Georgescu Val N. I. 45.
Georgian N. N. 11. 129
Gertler R. 36, 130, 140.
Gherorghian L. 48.
Gheorghiev G. 21.
Gheorghiu A. 12, 59.
Gneorghiu E. O. 9.
Gheorghiu Th. Gh. 12. 22, 32, 39, 44, 45, 46. 50. 51, 60, 61, 62, 66, 67, 73, 74, 75, 78, 79, 80, 85, 86, 87, 90, 91, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 114. 115, 116, 118, 119, 126, 129, 130. 131, 140, 141, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 160, 166, 167, 168, 169, 170, 171.
Gheorghiu C. O. 100.
Gheorghiu Ş. 71, 125.
Gheorghiu C. V. 125.
Gheorghiu G. V. 21.
Gherlan V. 10, 11, 25, 36, 47, 48, 49, 66, 77, 89, 129, 130, 143, 144, 146, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 154, 170, 171.
Ghermănescu M. 154, 159, 171.
Ghersch P. 36, 47, 89, 146, 147.
Gheţu G. E. 10, 143, 168.
Ghimuş A. D. 74. 100.
Ghircoiaşiu V. N. 12.
Ghiţescu S. 12.
Ghiţescu V. 12, 78, 84, 90, 111, 139, 144.
Giurconiu M. 10, 11, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 38. 47, 48, 50, 65, 77, 89, 100. 115, 117, 118, 129, 130, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 152. 153, 167, 168.
Giurconiu V. 77.
Gligor I. 10, 11, 23, 24, 25, 62, 77, 89, 116, 126, 128, 129, 141, 142.
Gloden A 12, 19, 31, 32, 43, 50, 59, 97, 137, 138, 139, 147, 163.
Goaleg I. 100.
Godea P. I. 62, 63, 98, 116, 128.
Goga F. 12, 74.
Goldiş T. G. 33, 77, 129, 142, 143.
Goldstein I. 60.
Golea I. 62.
Gongu D. I. 150, 152, 153.
Gotthard F. 142.
Gradin G. 60
Grapini E. 112.
Grigore A. G, 38, 77, 118, 128, 129, 142, 166.
Grofşoreanu G. 86.
Grozescu L. 74, 100.
Grumăzescu M. 13, 35, 140, 142.
Grünbaum M. 113.
Guttmaun T. 10, 11, 35, 36, 47, 49, 77, 89, 118, 142, 144, 146, 147.

Hadviger F. 125.
Hagiu I. 10.
Haimovici A. 21, 59, 125,
Haimovici M. 125.
Hanganu V. 125.
Hansen 59.
Haret S. R. 10, 11, 24, 25, 35, 36, 47, 66, 77, 89, 117, 129, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 167.
Hendl M. M. 33,
Hermann V. 13, 77.
Hodor N. M. 149.
Hollinger A. 94.
Honae A. C. 9, 13.
Horoviţ B. 129.
L'Hôspital 80, 81, 93, 94, 95
Hriatine E. 13.
Hristea H. 13, 164.
Hurezeanu R. 11, 36, 47, 48, 50, 77, 129, 130, 143, 144, 146, 147, 149, 152, 153.
Hütte 60.

Iacob E 9. 13, 38, 90, 102, 170.
Ianca S. 48, 50.
Iancu S 10, 48, 89, 149, 153.
Iasinschi N. 13.
Ilea V. 10, 11, 77, 142.
Iliescu G. 125.
Ioachimescu A. G. 44, 61, 135.
Ioan S. 35.

Ion C. I. 77.
Ionescu Biss P. H. 13.
Ionescu Bujor C. 13, 113.
Ionescu C. 48, 49, 50.
Ionescu F. P 62, 97, 98, 100, 116, 148.
Ionescu I. 21, 112, 128. 149.
Ionescu D. V. 13, 32, 84, 85
Ionescu Țiu D. C. 13, 26, 38, 46, 73, 77, 102, 171.
Iosifescu C. 74, 100.
Iovănel C. 11. 130.
Iovănel G. 143, 152.
Irimescu I 21.
Isfanu T. 100.
Iunger A. 10, 35, 56, 77, 144, 146.

Jidanu C. 73, 36, 98, 128.
Jivănescu S. 13.
Joachimstal 142.
Jucu N. 13.
Jungu L. 100.

Kapteyn 50.
Katz P. 60.
Kaufmann I. 70.
Kielburger M. 13.
Kinsky I. 100, 102.
Knopf H. 100.
Kühn I. 13.

Lagrange 111.
Lambrino V. 13
Laplace 59.
Lascu B. 13.
Laţiu V. 13
Lebovitz E. 10, 35, 36, 47. 77, 144, 146.
London E. 102.
Leonida D. 13.
Liteanu G. 13, 59.
Loziciu I. 13.
Luca E. 125.
Luca I. 74, 100.
Lungu A. I. 144, 146.
Lungu I. 35, 147.
Lupan A. 13.
Lupescu C. 126.
Lupescu G. 60.

Macovei E. 10, 11, 77, 129, 142, 167
Macovschi E. 13.
Mahrenholz J. 63, 64, 74, 76, 100, 128
Maian I. Ana 64
Maior N. 13.
Man A. 48, 49, 50.
Man I. 36, 90, 129, 143, 144, 146, 147, 149, 150, 152, 153, 154, 171.
Man O. 49, 129, 142, 149.
Mănescu I. 11, 23, 24, 34, 35, 36, 47, 48, 49, 50, 77, 89, 143, 144, 145, 146, 147, 170.
Mangeron I. D. 9, 21, 125.
Manolache C. M. 100.
Manolescu G. 34, 35, 36, 47, 48, 49, 77, 89, 116, 129, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 171.
Manta N. 48.
Manughevici C. 13.
Marandici A. 49.
Mărculescu O 13.
Mărcuţiu S. 10, 35, 36, 47, 48, 49, 77, 89, 129, 144, 147, 149, 153, 171.
Mardan D. 13.
Mărgineanu A. I. 143.
Marinescu D. 35, 36, 47, 48, 77, 89, 129, 130, 143, 146, 147, 153, 167, 171.
Marinescu I. 13.
Marinescu P. 94.
Mateescu S. 13.
Matei D. 73.
Mateiu A. 13.
Matieş V. I. 13. 39, 101, 167.
Mayer O. 21, 59.
Mazilu M. 33, 128, 142
Mehedincu V. V. 96.
Mehlmann T. 46.
Menelaus 145.
Mereuţă, E. 13.
Mesche I. 100.
Meteş M. 142.
Miclea N 128.
Miclescu A. 45.
Mihăileanu N. N. 10, 13, 21, 26, 27, 29, 44, 71, 74, 86, 125, 139, 141, 146, 152, 167.
Mihoc N. O. 74.
Mihu C. 50, 97.
Milcoveanu D. 13.
Mioc V. 13.
Mitric A. 26, 35, 129, 142, 167.
Modâlcă S E. 73, 98, 126.
Moivre 34.
Moldovan C. 140.
Moldovan M. 10, 11, 34, 35, 36, 47, 48, 65, 66, 77, 142, 143, 144, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 171.
Montel P. 7, 8. 9.
Morariu I. 100.
Mordann D A. 152.
Moreno H. 152.
Moroianu A. 49, 147, 148, 153
Munteanu G. 47, 48. 129, 130, 146, 149, 152, 154.
Munteanu I. 10, 11, 24, 25, 34, 35, 36, 47, 48, 66, 77, 89, 142, 144, 145, 146, 147, 167.
Munteanu G. L. 63
Munteanu O. 125.
Murariu P. 13.
Mureşan I. O. 74.
Murgulescu Elena 13.
Murgulescu G. I. 9, 13.
Musta Ş. 13
Muţiu S. A 33, 160.
Myller A. 21.

Nadaşan S. 1, 13, 15, 27.
Nadolschi V. 59
Naneş Cornelia 99.
Naneş G. 13.
Neagu M. 146, 147.
Nedelcu M. 10, 24, 36, 47, 77, 89. 142, 144, 145.
Nedelcu V. 146.
Negoescu N. 125.
Negrea A. M. 73, 86.
Negrescu F. 46.
Negru S. 48, 49.
Negulescu S. D. 73.
Neguţ I. 23, 36, 47, 48, 50, 77, 115, 129. 130, 143, 146, 147, 149, 152, 153,
Nemeth E. 48, 146, 149, 171.
Nemeth I. 13, 38.
Nemoianu C. 152, 153.
Neştianu G. G 44.
Neumann Maria 89, 115, 118, 130, 146, 149.
Newton 78, 123,
Nicolau A. 13.
Nicolau M. 71.
Nicolau P. 13.
Niewenglowski 94.
Nicolescu I E. 86.
Niculescu C. 112.
Nicolescu M. 21, 42.
Nicolescu V. G. 41, 59, 135.
Nistorescu D. 73.
Novac I. I. 10, 11, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 47, 48. 49, 50, 66, 77, 89, 102, 116, 117, 118, 128, 129, 130, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149. 151, 152, 153, 154, 170, 171.

Ogrin N. 13.
Olteanu G. I. 100.
Oltenschi I. 13.
Onicescu O. 13, 113.
Oprea D. G. 100.
Opreanu M. 129.
Oprişor S. 125.
Orăşanu G. 13.
Orăşeanu C. 13.
Ovesea N. 49.

Paişanu I. 47.
Păläceanu D V. 100.
Palade D. 129, 142, 167.
Pali S. 11, 26, 36, 48, 75, 77, 89, 100, 118, 129, 142, 143, 146. 147, 149, 150, 151, 152, 153, 171.
Pană R. 49.
Panait I. 49, 50.
Pănoiu N. 11.
Pantea A. 25, 36, 47, 49, 77, 89, 129, 130, 143, 144, 146, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 154,. 170, 171.
Papelier 79, 80, 94.
Papus 86.
Pârvu I 48, 50.
Păsărariu G. G. 129.
Patriciu V. 13.
Pătroianu M. 44.
Păunescu S. G. 129, 149.
Pavel N. 48.
Petanca Dacia 24, 25, 35, 36, 77, 89, 144, 146, 147, 149.
Petrescu A. 13.
Petrescu An. 13.
Petrescu P. B. 73.
Petrescu M. 73.
Petrescu S. 9.
Petrescu V. 125.
Petrovici D. 86.

Pisanca I. 10, 23, 24, 34, 35, 36, 47, 48, 49. 50, 89, 129, 144, 149, 151. 152, 153, 171.
Pitagora 137, 138
Piţulescu 98.
Plângu I. 10.
Paboran I. V. 13.
Podariu A. 45.
Podraczky V. 146. 147.
Poenariu G. 35, 36, 47, 48, 49, 77, 144, 147.
Pompeiu D. 79, 117.
Pop E. 13, 100.
Pop V. 13.
Popa E. 125.
Popa I. 125.
Popa N. 13
Popa P. 129, 151, 152, 153.
Popa V. 10, 11, 23, 24, 25, 26, 35, 36, 47. 48, 49, 50, 89, 102, 118, 128, 129, 142, 143, 144, 146.
Popa V. C. 128.
Popa D. M. 46.
Popa Radu B. R. 85.
Popescu B. 10, 35, 48, 50, 63, 100, 146,
Popescu D. 10, 11, 77, 89, 118, 129, 142, 167
Popescu E. 13.
Popescu Eug. 13,
Popescu I. 13.
Popescu Maria 74.
Popescu S. 22, 60, 125, 129.
Popescu I. A. 47, 50, 62, 75, 100, 116, 129, 146, 149
Popescu N. C. 13, 45. 85.
Popescu Salcia I. B. 144.
Popineanu N. 125.
Popovici A. 86.
Popovici C.C. 46.
Popovici D. 10.
Popovici T. I. 45, 59, 85.
Popovici T. 59.
Porumb N. 13.
Poussin V. 93.
Predoescu I. M. 13.
Pringsheim 67.
Prisăcaru M. 142.
Procopiu S. 125.
Protopopeseu I. 60, 113.
Ptolomeu 138.
Purcariu I. 13.
Purcariu L. 13.
Purcea M. I. 143, 146, 152, 153, 171, 164.
Puşcaşiu S. 10, 23, 24, 35, 36, 47, 48, 49, 65, 77, 89, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 170.

Racliş N. R. 13.
Radoslav I. G. 98.
Radu R. 35, 36.
Rădulescu O. 73.
Rădulescu V. 48, 49, 50.
Rădulet R. 13.
Râmboiu S. 10, 11, 23, 24, 50, 77, 89, 129, 130, 144, 146, 147, 151, 171.
Râmniceanu C. 140.
Răuţ C. 45, 49.
Răuţ T, 48, 50.
Răuţu P. 148.
Regep T. 77.
Ripianu A. 86, 97.
Ristea G, 11, 23, 35, 36, 47, 48, 50, 89, 129, 130, 144, 146, 149, 152, 153, 171.
Rogoz T. 49.
Rohr I. A. 46.
Rohrlich A. 77, 129.
Roibănescu C. 13.
Roman C. 35, 47, 49, 50, 77, 90, 129, 142, 144, 171.
Roman I. 13, 36.
Roşu A. A. 32.
Ruscior Ştefania 125.
Rusu L. M. 73.

Sabău G. M. 33.
Sabota 152, 153, 171.
Safirescu D. 13.
Safta N. 142.
Sălceanu C. 9, 13.
Săruleşteanu E. 73.
Săsărman M. 23, 47, 144, 167.
Sasu I. 100, 117, 128, 129, 142.
Sanciuc L. 13.
Săveanu N. L. 125.
Savi N G. 9, 13.
Savin C. I. 13, 73.
Scărlătescu D 13.
Schileru D I. 11, 13, 85, 114, 116.
Schiopu R. I. 117, 129, 142.
Schlomiuk H N. 147.
Schram Edith 13.
Scodihor G. 77.
Scurtu G. 48, 49.
Segal Z. 46, 74 140.
Segârceanu E Dilly 166.
Şeibulescu A. C. 86.
Serasin E 151, 152, 171.
Şerban C. C. 46.
Şerengău M. 11, 23, 64, 77, 90, 118, 129, 167.
Sergescu P. 8, 14, 21, 125.
Sergiu E 146.
Sergiu P. 65, 66.
Severineanu C. 14.
Silaş G. 14, 166.
Silion G I. 45, 46
Simion I. 128, 151, 153, 171.
Simionescu D. G. 14, 36, 44, 47, 113.
Simionescu G. 48, 144 147.
Singer, A. 34.
Sipos I. E 75, 100.
Smighelschi O. 14, 50.
Soare V. M. 100.
Sorian O. 117.
Şrager A. 35, 77.
Staicu I. 60.
Stamate I. I. 14, 75, 129, 141.
Stamatescu I. 14, 94, 125.
Stamatiu M. 45, 60.
Stambuleanu A. 14.
Stan A. 14, 112, 138.
Stan P. 34, 35, 36, 47, 49, 77, 89, 90, 143, 144, 146, 147, 171.
Stăncescu C. 14.
Stanciu O. 11, 77, 80.
Stanciu V. M. 11, 23, 77, 89, 143 ,147, 167.
Stanciu P. 48, 49, 50, 100, 102, 116, 117, 118, 126, 142, 148.
Stanciu D. D. 102, 129, 132, 146, 147, 148. 151, 152, 153, 154, 171.
Stancu N. 48, 49.
Stancu M. V. 147.
Stănescu D. C. 129, 149, 154, 164.
Stănilă G. 10, 11, 36, 47, 77, 128, 130, 143, 144, 146, 147, 150, 153, 167.
Stantzel E 9, 14.
Ştefan I. 48, 49, 50.
Ştefănescu N. D. 73, 86, 149.
Ştefănescu F. M. 22, 33, 61, 98.
Ştefănescu S. 48, 49, 50, 146, 147, 148, 171.
Steiner 59, 160.
Stern T. 10, 11, 36, 65, 77, 89, 90, 129 142, 144.
Stoenescu A. 32, 44, 71, 84
Stoian A. 142, 144.
Stoica D. 32.
Stoicescu L. 14.
Stoicescu M. 14
Stroescu F. 36, 77, 90, 129, 142, 144, 146.
Strub C. 22.
Suba P. 14.
Suciu G. 9.
Székely G 48, 144, 145, 146, 147, 149 151, 153, 154, 171.

Tămăşescu D. V. 149.
Tancovici V. C. 86.
Tannery Y. 94.
Tărăbuţă C. P. 45, 46, 60.
Tarălungă S. 60, 116.
Tarcea I. 47, 129, 149, 150, 171.
Târcomnicu C. 23, 34, 35, 36, 49, 50, 66, 90, 145, 148, 149, 171.
Târlie I. 147.
Tarola A. 48, 49.
Tarţa T. 14.
Tartaglia 123.
Tătaru S. 48, 49.
Tatomir I. 49.
Taylor 32.
Teleagă D. 129, 149, 151, 152, 153, 171.
Teiuşan H. 10, 36, 47, 49, 66, 77, 129, 142, 144, 146.
Teodorescu C. 14, 113, 139.
Teodorescu N. D. 86.
Teodorescu P. 10, 11, 19, 23, 24, 34, 35, 36 47, 49, 50, 66, 77, 78, 89, 90, 117, 118, 129, 130, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 154, 167, 168, 171.
Theodosiu A. 14.
Thales 67.
Théboult V. 20, 32, 98, 115.
Tibar A. 149.
Tică N. 14, 126.
Ţigănoiu I. A. 62, 100, 128.
Tilică S. C. 73, 74, 97, 98, 126, 128

Tincu C. 10, 11, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 47, 48, 49, 62, 66, 75, 77, 89, 90, 98, 100, 101, 102, 116, 117, 118, 126, 128, 129, 142, 144, 146, 147.
Ţino O N. 14, 71, 94.
Ţiţeica Gabriela 84.
Ţiţeica G. 1, 8, 71, 80, 165.
Ţiţeica Ş. 125
Titero I. 89, 129, 142.
Toderascu I. V. 129, 130, 151, 152, 153, 171.
Trache D. 48.
Trică M. 47.
Tripa I. 117, 129.
Trofim P. 113.
Trufin E. 14.
Turbuţiu G. 10, 11, 36, 47, 48, 50, 77, 90, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 152, 153, 167.
Tucă M. 10, 11, 77, 143, 144.
Turcu V. 14.
Tutor A. 33.

Udrea M. 48, 49, 50.
Urdăreanu P. 171.

Vâlcovici V. 14, 60, 139.
Vardala I. 112
Vasilescu B. 86.
Vasilescu Karpen N. 112.
Vasiliu G D. 62, 116.
Vasiliu M. G. 45.
Vasilu H. 125.
Vasiliev A. B. 98.
Vasu V. 22.
Veliciu M. 49.
Venter D. 74, 126, 128.
Le Verier 32.
Vlad C. I. 97.
Vlad I. V. 14
Vlădescu I. 14.
Vlăduţi C. 142.
Viciu A. 14, 73.
Ville S. 22.
Vişa E. 11, 14, 26, 38, 39, 55, 66, 78, 107, 119, 130, 148, 151, 153, 154, 171.
Voinea R. P 112.
Voinea S 48, 49, 50.
Vrânceanu G. 117, 129.
Vrânceanu G G. 101, 107.

Weber M. 14.
Wegener E. 50, 62, 73, 74, 75, 86, 97, 98, 99, 100, 115, 116, 117, 118, 119, 126, 128, 140, 141.
Winter A. 125
Withe G. 46.
Wittlock P. W. 137.

Zagaican I. 73.
Zăgănescu I. 14.
Zaharia N. O. 14
Zapan G. 14.
Zbârcea I. 152, 153.
Zbegan V. 14.
Zelinger N 129, 152, 153, 154, 171.
Zigu S. 22.

Nota redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Profesor *Vasile Mioc*, Asistent la Politehnică şi Director la lic. Diaconovici Loga, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 1 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine

Bălă C-tin (P.); 2245, 2261, 2272, 2471, 2577; *Bălăuţă M.* (2560, 2564, 2565); *Banciu Gh.* (2523, 2555. 2560, 2565, 2571, 2579); *Barbul Vasile* (2551, 2565, 2568, 2571, 2572, 2574); *Breazu Mihai* (2537, 2543, 2545, 2546, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2560, 2564, 2565, 2566, 2568, 2571, 2576, 2579, 2580); *Cantili I. V.* (2549, 2550, 2551, 2552, 1571, 2572, 2574); *Constantinescu Ilie* (N; P); *Coţiu Aurel* (2538, 2552, 2554, 2558, 2560, 2565, 2566, 2571, 2575, 2579, 2580); *Deutsch Emeric* (P; 1494, 1559, 1687. 1832, 1877, 2325, 2373, 2392, 2416, 2460, 2476, 2503, 2502, 2552, 2577); *Erdélyi Ioan* (2571, 2577, 2585); *Gârleşteanu Eliza* (2529, 2550); *Găzdău Mircea* (2565, 2556, 2580); *Filipescu C.* (2499, 2501. 2503, 2505, 2508, 2509, 2513, 2568); *Hurezeanu Romulus* (2574, 2579, 2580); *Iovănel C.* (2508, 2549); *Lăpuşanu V.* (2571); *Man Iosif* (P; 2554, 2571. 2572); *Munteanu Giuseppe* (2428, 2449, 2552, 2560, 2562, 2566, 2572); *Morega Titus* (2537, 2551, 2564, 2571, 2579, 2580); *Neguţ Ion* (P; 1763, 2054, 2110, 2276, 2579, 2580); *Pantea Alexandru* (1140, 1393, 1405, 1413, 2496, 2514, 2523, 2524, 2531, 2565, 2571, 2579); *Păsăriu Gheorghiu* (2551, 2571, 2579, 2580); *Păunescu Gheorghe* (P; 2523, 2571); *Purcea Ion* (2510, 2517, 2540, 2543, 2544, 2564, 2568, 2571, 2574, 2580); *Pisanca Ionel* (N; P; 2420, 2452, 2475, 2480, 2490, 2496, 2508, 2509, 2523, 2553, 2564); *Popa Pavel* (2531, 2537, 2555, 2564, 2565, 2571; *Popa Septimiu* (2472, 2489, 2491, 2502, 2510, 2524, 2531); *Radu D-iru* (2496, 2505, 2571, 2579); *Sahota Ion* (1140, 1156, 1190, 2420, 2427, 2462, 2472, 2491, 2537, 2555, 2559, 2579); *Sârbu I.* (1519, 9498, 2499, 2523, 2565, 2571); *Sefrate Adrian* (2493, 2551, 2565, 2571); *Soare V. M.* (2493, 2509, 2515, 2518, 2519, 2524, 2531, 2535 2551, 2565, 2566, 1567); *Soporean Emil* (2530, 2531, 2565), *Stancu D.* (P. 2282, 2326, 2555, 2564, 2566, 2571, 2574, 2579, 2580); *Stănilă Gh.* (2513, 2517, 2552, 2565, 2566, 2571, 2574); *Şuta Mihai* (2496, 2498, 2546, 2579, 2580); *Teodorescu Petre* (2538); *Tibăr Aurel* (2496, 2514, 2537, 2546, 2555, 2565, 2579, 2580, 2584); *Zelinger N.* (P.).

INFORMAŢII

Cursul de

ANALIZĂ INFINITEZIMALĂ

de Prof. *V. Alaci*, este sub tipar. A apărut până în prezent: *Calculul Diferenţial*. Preţul volumului apărut este de 350 lei, la care se adaogă cheltuielile de expediţie pentru acei din alte localităţi. A se adresa D-lui editor, L-t. C-dor av. *Iacob Lazăr* librăria studenţească, strada Napoleon 2, Timişoara I.

1. Nu se publică în revistă decât manuscrise dela abonaţi.

2. Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise citeţ (în special iscălitura) numai pe o parte a hârtiei. Probleme propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor, iar cele rezolvate, de enunţ. Nu sunt luate în considerare probleme rezolvate iscălite de mai mulţi corespondenţi. Problemele rezolvate vor fi redactate îndependant una de alta, şi nu în continuare.

3. Numele colaboratorilor dela cari s'au primit soluţii la problemele publicate în acest număr şi care au sosit la redacţie după data de 15 a lunei precedente, nu mai pot fi trecute în corpul revistei. Numele lor este însă menţionat pe copertă împreună cu numărul problemei rezolvate.

4. Rugăm pe corespondenţii noştrii la orice schimbare de adresă sau lipsă din localitate fără a avea pe cineva să le primească revista, să ne anunţe din vreme. În caz contrar revista ne vine înapoi şi cu regret anunţăm că a doua oară nu o mai putem expedia, Mai mult, se suspendă expedierea numerelor următoare până ce abonatul va reclama aceste numere.

5. Aducem la cunoştinţa corespondenţilor care le lipsesc numere din vol. XXVII că şi le pot procura, trimiţând costul lor odată cu abonamentul pentru vol. XXVIII. Pe pagina a doua a copertei sunt trecute numerele pe care le mai avem în depozit.

6. *Stănilă D. G. B.* Numărul comandat este epuizat încât trimeteţi abonamentul pe anul viitor cu 32 lei mai puţin.

Rugăm pe D-nii membri şi pe D-nii colaboratori să-şi achite taxa de membru şi abonamentul pe anul viitor pentru a li se putea trimite no. 1. Preţul abonamentului este de 250 lei iar taxa de membru de 200 lei. Rugăm deasemeni trimiteţi noile adrese exacte.